solucionario
2015-I
Examen de admisión
Matemática
ACADEMIA CESAR VALLEJO

PREGUNTA N.° 1

Sea el número $E=2^{2001}+3^{2001}$. Calcule el residuo de dividir E entre 7.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Tema: Teoría de la divisibilidad

Recordemos que

- $\left(\overset{\circ}{n}+r\right)^k=\overset{\circ}{n}+r^k$
- $\left(\overset{\circ}{n}-r\right)^k=\begin{cases}\overset{\circ}{n}+r^k;\ \text{si } k \text{ es un número par}.\\ \overset{\circ}{n}-r^k;\ \text{si } k \text{ es un número impar}.\end{cases}$

Análisis y procedimiento

Como debemos calcular el residuo de dividir E entre 7, la pregunta la podemos expresar de la siguiente forma.

$$E=2^{2001}+3^{2001}=\overset{\circ}{7}+r \quad (r\text{: residuo})$$

Convenientemente tenemos

$$2^3=\overset{\circ}{7}+1 \ \text{ y } \ 3^3=\overset{\circ}{7}-1$$

Dando forma, se tiene

$$E=(2^3)^{667}+(3^3)^{667}$$

$$E=\left(\overset{\circ}{7}+1\right)^{667}+\left(\overset{\circ}{7}-1\right)^{667}$$

$$E=\left(\overset{\circ}{7}+1^{667}\right)+\left(\overset{\circ}{7}-1^{667}\right)$$

$$E=\left(\overset{\circ}{7}+1\right)+\left(\overset{\circ}{7}-1\right)$$

$$\rightarrow\ E=\overset{\circ}{7}$$

$$\therefore\ r=0$$

Respuesta

0

PREGUNTA N.° 2

¿Cuántos números de la forma $\overline{(4a-3)(3b)(4a-3)}$ son primos?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Tema: Clasificación de los enteros positivos

Análisis y procedimiento

Observamos que para poder hallar la cantidad de números primos de la forma $\overline{(4a-3)(3b)(4a-3)}$, estos están en función de los valores de a y b.

Si a y b fueran números racionales, los números primos de esa forma serían

$$\overline{(4a-3)(3b)(4a-3)}$$

15 números

1	0	1
1	3	1
1	5	1
1	8	1
1	9	1
3	1	3
	⋮	
9	1	9
9	2	9

Por lo tanto, existen 15 números primos de la forma pedida, lo cual no coincide con ninguna de las alternativas.

Si a y b fueran números enteros, los números primos de esa forma serían

$$\overline{(4a-3)(3b)(4a-3)}$$

Considerando $a=1$

$$\overline{1(3b)1}$$

1	0	1	(es primo)
1	3	1	(es primo)
1	6	1	(no es primo porque 161=7×23)
1	9	1	(es primo)

Considerando $a=2$

$\overline{5(3b)5}$ (no existe ningún primo de esa forma porque el número es $\overset{\circ}{5}$)

Considerando $a=3$

$\overline{9(3b)9}$ (no existe ningún primo de esa forma porque el número es $\overset{\circ}{3}$)

Por lo tanto, existen 3 números primos de la forma pedida.

Nota

El problema solo admite clave si se considera que a y b son enteros.

Respuesta

3

PREGUNTA N.º 3

En la expresión siguiente, $b \neq 0$

$0,a\widehat{b} - 0,b\widehat{a} = 0,4\widehat{4}$

Entonces la suma de todos los valores posibles de $0,a\widehat{b}$ que satisfacen la ecuación anterior es

A) $0,6\widehat{1}$ B) $1,3\widehat{3}$ C) $2,1\widehat{6}$
D) $3,1\widehat{1}$ E) $4,16$

Resolución

Tema: Números decimales

Análisis y procedimiento

Expresamos cada número decimal en su fracción generatriz.

$0,4\widehat{4}$=0,44444 ..., lo cual se representaría correctamente como $0,\widehat{4}$.

$$0,a\widehat{b} - 0,b\widehat{a} = 0,4\widehat{4}$$

$$\frac{\overline{ab}-a}{90} - \frac{\overline{ba}-b}{90} = 0,\widehat{4}$$

$$\frac{(\overline{ab}-a)-(\overline{ba}-b)}{90} = \frac{4}{9}$$

$$\overline{ab}-a-\overline{ba}+b=40$$

$$(10a+b)-a-(10b+a)+b=40$$

$$8a-8b=40$$

$$a-b=5;\ \ (b\neq 0)$$

a	b
6	1
7	2
8	3
9	4

Luego, los valores de $0,a\widehat{b}$ son

$0,6\widehat{1}$; $0,7\widehat{2}$; $0,8\widehat{3}$ y $0,9\widehat{4}$.

Para poder sumar los valores de $0,a\widehat{b}$ pasamos cada número a su fracción generatriz.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Suma de}\\ \text{valores de } 0,a\widehat{b}\end{array}\right) = \frac{61-6}{90}+\frac{72-7}{90}+\frac{83-8}{90}+\frac{94-9}{90}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Suma de}\\ \text{valores de } 0,a\widehat{b}\end{array}\right) = \frac{55+65+75+85}{90} = \frac{280}{90} = 3,\widehat{1}$$

Observando las alternativas, lo obtenido lo han representado como $3,1\widehat{1}$.

Respuesta

$3,1\widehat{1}$

PREGUNTA N.° 4

Se tiene la siguiente igualdad

$(\overline{aaa1}_{(9)})^{1/3}=\overline{1(a+2)}_{(9)}$

Entonces podemos decir que el conjunto

$\{a\in\{1, 2, 3, ...8\}/(\overline{aaa1}_{(9)})^{1/2}$ existe$\}$.

A) No posee elementos
B) Posee un solo elemento
C) Posee dos elementos
D) Posee tres elementos
E) Posee cuatro elementos

Resolución

Tema: Potenciación y Radicación

Análisis y procedimiento

Se sabe que

$$\overline{aaa1}_{(9)}^{1/3}=\overline{1(a+2)}_{(9)}$$

$$\overline{aaa1}_{(9)}=\overline{1(a+2)}_{(9)}^{3}$$

Al descomponer polinómicamente, tenemos

$$\underbrace{819a+1}=\underbrace{(11+a)^3}$$

Si $a=1$	$\rightarrow$	...0	...8 ¡No puede ser!
Si $a=2$	$\rightarrow$	...9	...7 ¡No puede ser!
Si $a=3$	$\rightarrow$	...8	...4 ¡No puede ser!
Si $a=4$	$\rightarrow$	...7	...5 ¡No puede ser!
Si $a=5$	$\rightarrow$	...6	...6 ¡Puede ser!
Si $a=6$	$\rightarrow$	...5	...3 ¡No puede ser!

Verificamos.

Si $a=5$, tenemos

$$\underbrace{819(5)+1}_{4096}=\underbrace{(11+5)^3}_{4096}$$

$\therefore\ a=5$

Luego, del enunciado se tiene el conjunto $\left\{a\in\{1;2;3;...;8\}/\sqrt{\overline{aaa1}_{(9)}}\text{ existe}\right\}$, al que llamaremos A.

Reemplazando $a=5$, tenemos

$$A=\left\{5\in\{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 8\}/\underbrace{\sqrt{5551_{(9)}}}_{\sqrt{4096}=64}\text{ existe}\right\}$$

$A=\{5\}$ (Es un conjunto unitario)

Por lo tanto, A posee un solo elemento.

Respuesta

Posee un solo elemento

PREGUNTA N.° 5

Semanalmente, un trabajador ahorra cierta cantidad en soles, y durante 40 semanas ahorra las siguientes cantidades:

21	35	29	31	23	22	28	33
28	25	31	26	24	27	27	33
37	29	19	36	23	18	46	12
26	41	30	18	39	15	24	4
25	33	10	28	20	27	17	31

Se construye una tabla de frecuencias de 7 intervalos de igual longitud fija A. Si F_5 es la frecuencia acumulada del quinto intervalo (ordenados los extremos de los mismos de forma creciente), determine el valor de $(A+F_5)-1$

A) 30
B) 32
C) 37
D) 38
E) 39

Resolución

Tema: Estadística

Análisis y procedimiento

Para elaborar la tabla de distribución de frecuencias, primero ordenamos el conjunto de datos.

4	10	12	15	17	18	18	19	20	21
22	23	23	24	24	25	25	26	26	27
27	27	28	28	28	29	29	30	31	31
31	33	33	33	35	36	37	39	41	46

Recordemos que

$$A=\frac{R}{K}$$

R ← rango (diferencia entre el mayor y el menor de los datos)

K ← número de intervalos de clase

A ↑ ancho de clase común

Para nuestro caso

$$A=\frac{46-4}{7}$$

$$A=6$$

Construimos la tabla de distribución de frecuencias de 7 intervalos y con ancho de clase común igual a 6.

I_i	f_i	F_i
[4; 10⟩	1	1
[10; 16⟩	3	4
[16; 22⟩	6	10
[22; 28⟩	12	22
[28; 34⟩	12	34
[34; 40⟩	4	38
[40; 46]	2	40

Se observa que $F_5=34$.

Nos piden

$$(A+F_5)-1=(6+34)-1=39$$

Respuesta

39

PREGUNTA N.° 6

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado:

I. Sean $A\subset B\subset C\subset D$, entonces la probabilidad $P(D)=P(D\setminus A)+P(C\setminus A)+P(B\setminus A)+P(A)$

II. Se lanzan dos dados normales, entonces la probabilidad que su suma sea 7 es $\frac{1}{12}$.

III. Se lanzan dos dados normales, uno cada vez, entonces la probabilidad de que salga 3 dado que antes salió 1 es $\frac{1}{36}$.

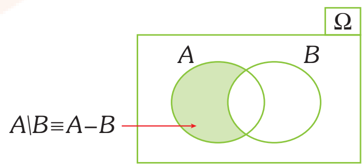
A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) FFV
E) FFF

Resolución

Tema: Probabilidades

Nota

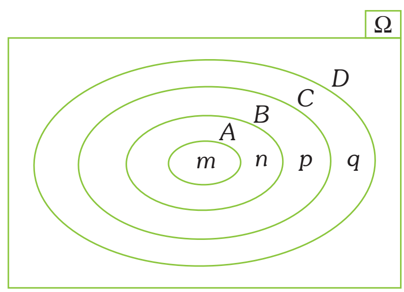
Dentro de las operaciones con eventos, la notación $A\setminus B$ es equivalente a $A-B$.



Análisis y procedimiento

I. **Falsa**

Si $A\subset B\subset C\subset D$ graficando los eventos dentro de un mismo espacio muestral, tenemos



Sea:

- $P(A)=m$
- $P(B\backslash A)=n$
- $P(C\backslash B)=p$
- $P(D\backslash C)=q$

Se puede deducir que

$$\underbrace{P(D)}_{m+n+p+q}=\underbrace{P(A)}_{m}+\underbrace{P(B\backslash A)}_{n}+\underbrace{P(C\backslash B)}_{p}+\underbrace{P(D\backslash C)}_{q}$$

lo cual no coincide con lo que la proposición afirma.

$$P(D)=\underbrace{P(D\backslash A)+P(C\backslash A)}_{\text{esto no coincide con lo obtenido}}+P(B\backslash A)+P(A)$$

II. **Falsa**

ε: Lanzar dos dados normales y observar los números que salen en la cara superior de los dados.

El espacio muestral asociado a ese experimento aleatorio es:

$\Omega=\{(1;\,1),\,(1;\,2),\,(1;\,3),\,...,\,(6;\,6)\}$

$\rightarrow\ n(\Omega)=6\times6=36$

Como se puede apreciar:

Resultado en el dado 2						
6	(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)
5	(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
4	(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
3	(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
2	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
1	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
	1	2	3	4	5	6 Resultado en el dado 1

Definimos el evento

A: La suma de resultados al lanzar dos dados es 7.

$A=\{(1;\,6),\,(2;\,5),\,(3;\,4),\,(4;\,3),\,(5;\,2),\,(6;\,1)\}$

$\rightarrow\ n(A)=6$

$\rightarrow\ P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$, lo cual no coincide con la proposición.

III. **Falsa**

ε: Lanzar dos dados normales uno cada vez y observar los números que salen en la cara superior de los dados.

El espacio muestral asociado a dicho experimento aleatorio es:

$\Omega=\{(1;1),\,(1;\,2),\,(1;\,3),\,...,\,(6;6)\}$

$\rightarrow\ n(\Omega)=6\times6=36$

Sean los eventos

- A: el resultado obtenido en el segundo lanzamiento es 3.
- B: el resultado obtenido en el primer lanzamiento es 1.

Lo que debemos hallar es

En el primer y segundo lanzamiento se debe obtener 1 y 3, respectivamente

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B)=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{6}$$, lo cual no coincide con la proposición.

Respuesta

FFF

PREGUNTA N.° 7

Sabiendo que $K=\overline{ab}_{(4)}=\overline{cd}_{(5)}$ y $a+b+c+d=11$ en el sistema decimal con $a \neq 0$, $c \neq 0$. Determine K en el sistema decimal.

A) 14 B) 23 C) 32
D) 41 E) 51

Resolución

Tema: Numeración

Análisis y procedimiento

Se sabe que

$$K=\overline{ab}_{(4)}=\overline{cd}_{(5)} \quad \text{y} \quad a+b+c+d=11$$

Descomponiendo polinómicamente, tenemos que

$$K=\underbrace{4a+b=5c+d}\,;$$

$$3a+(a+b)=5c+d \qquad \text{(I)}$$
$$a+b=11-c-d \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$3a+(11-c-d)=5c+d$$

$$3a+11=\underbrace{6c+2d}_{\text{número par}}$$

Entonces $3a$ es un número impar.

$\therefore\ a=1$ o 3

Evaluamos.

Caso 1

$a+b+c+d=11$
$b<4$

Si $a=1$ $\rightarrow$ $14=6c+2d$

$$7=3\underset{\smile}{c}+\underset{\smile}{d}$$

2	1	$\rightarrow$	$b=7$ (no cumple)
1	4	$\rightarrow$	$b=5$ (no cumple)

Caso 2

$a+b+c+d=11$
$b<4$

Si $a=3$ $\rightarrow$ $20=6c+2d$

$$10=3\underset{\smile}{c}+\underset{\smile}{d}$$

3	1	$\rightarrow$	$b=4$ (no cumple)
2	4	$\rightarrow$	$b=2$ (sí cumple)

Se concluye que

$a=3$; $b=2$; $c=2$; $d=4$

Finalmente

$$K=32_4=24_5$$

$\therefore\ K=14$ (en base 10)

Respuesta

14

PREGUNTA N.° 8

Se sabe que en una división entera el divisor es 50 y el residuo es 15. ¿Cuántas unidades como mínimo se le debe disminuir al dividendo, para que el cociente disminuya en 13 unidades?

A) 614
B) 615
C) 616
D) 617
E) 618

Resolución

Tema: Operaciones fundamentales

Análisis y procedimiento

Del dato inicial tenemos

$$\begin{array}{l|l} D & 50 \\ \hline 15 & q \end{array}$$

donde $D=50q+15$

Luego debemos disminuir a D el menor número entero positivo (N) que haga que el cociente disminuya en 13 unidades, del cual tendremos

$$\begin{array}{l|l} D-N & 50 \\ \hline r & q-13 \end{array}\ ;\ r<50$$

donde

$$D-N=50(q-13)+r$$

$$\overbrace{(50q+15)}-N=50q-650+r$$

$$\cancel{50q}+15-N=\cancel{50q}-650+r$$

$$665=N+r$$

Como N debe ser mínimo, hacemos que r sea máximo ($r<50$).

$$665=N+49$$

$$\therefore\ N=616$$

Por lo tanto, el menor valor que se le debe disminuir al dividendo para que el cociente disminuya en 13 unidades es 616.

Respuesta
616

PREGUNTA N.° 9

En el primer cuadrante del plano se forma el conjunto A con los puntos con coordenadas enteros positivos, esto es
$A=\{(m;\ n)/m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\}$.
A cada punto $(m;\ n)$ de A se le asigna el valor $\dfrac{1}{2^{m+n}}$. Calcule la suma de todos los valores de los puntos $(m;\ n)$ de A con coordenadas $m\geq n$.

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1
D) 2 E) $+\infty$

Resolución

Tema: Series

Análisis y procedimiento
Se define $m*n$ al valor que se le asigna a $(m;\ n)$; esto es

$$m*n=\frac{1}{2^{m+n}}$$

Calculamos el valor de $m*n$. Cuando $m\geq n$ por tabla de doble entrada, tenemos

					n			
	*	1	2	3	4	5	6	
m	1	$\frac{1}{2^2}$						
	2	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$					
	3	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$				
	4	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^8}$			...
	5	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^{10}}$		
	6	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^{10}}$	$\frac{1}{2^{11}}$	$\frac{1}{2^{12}}$	
				$\vdots$				$\ddots$

Sumando los valores y agrupando por el mismo denominador, la suma pedida es

$$S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\frac{2}{2^5}+\frac{3}{2^6}+\frac{3}{2^7}+\frac{4}{2^8}+\frac{4}{2^9}+\ldots$$

$$S=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\frac{4}{2^8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\frac{4}{2^9}+\ldots\right)$$

$$S=\underbrace{\left(\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\frac{4}{2^8}+\ldots\right)}_{M}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\frac{4}{2^8}+\ldots\right)}_{M}$$

$$=\frac{3}{2}M$$

Calculando M, tenemos

$$M=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\frac{4}{2^8}+\ldots$$

$$\frac{1}{4}M=\frac{1}{2^4}+\frac{2}{2^6}+\frac{3}{2^8}+\frac{4}{2^{10}}+\ldots \quad (-)$$

$$\frac{3}{4}M=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\ldots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow\quad M=\frac{4}{9}$$

$$S=\frac{3}{2}M=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$\therefore\quad S=\frac{2}{3}$$

Respuesta

$\frac{2}{3}$

PREGUNTA N.° 10

Si S es el conjunto solución de la inecuación

$\sqrt{|x+1|-|x-2|}<2$ se afirma

I. $\langle 1/4, +\infty\rangle\subset S$

II. $S\subset\langle 1/3, +\infty\rangle$

III. $S\cap\langle -\infty; 1/2\rangle\neq\phi$

¿Cuáles son afirmaciones correctas?

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I, II E) II y III

Resolución

Tema: Inecuaciones

Recordemos el siguiente teorema.

$$\boxed{|a|-|b|\leq|a-b|;\ \forall a;\ b\in\mathbb{R}}$$

Análisis y procedimiento

Al resolver la inecuación

$$\sqrt{|x+1|-|x-2|}<2$$

tenemos que

$$|x+1|-|x-2|\geq 0$$

$$|x+1|\geq|x-2|$$

Elevamos al cuadrado.

$$x^2+2x+1\geq x^2-4x+4\ \leftrightarrow\ x\geq 1/2 \qquad \text{(I)}$$

Aplicamos el teorema.

$$|x+1|-|x-2|\leq|(x+1)-(x-2)|=3;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\rightarrow\ \sqrt{|x+1|-|x-2|}\leq\sqrt{3}<2;\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \text{(II)}$$

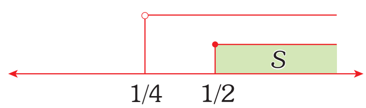
De (I) y (II) se tiene que $x\geq 1/2$

$\rightarrow$ CS$=[1/2;\ +\infty\rangle$

Luego, $S=[1/2;\ +\infty\rangle$.

I. **Incorrecta**

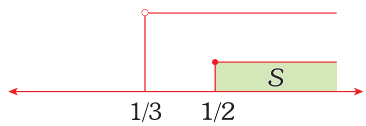
Se observa que



$$\left\langle\frac{1}{4};+\infty\right\rangle\not\subset S$$

II. **Correcta**

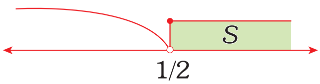
En efecto, se tiene que



$$S\subset\left\langle\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$$

III. **Incorrecta**

Del gráfico



Se observa que

$$S\cap\left\langle -\infty;\ \frac{1}{2}\right\rangle=\phi$$

Respuesta

solo II

PREGUNTA N.° 11

Respecto a la función $f(x)=|x|-x$, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $f(x+y)\leq f(x)+f(y);\ \forall\, x;\ y\in\mathbb{R}$.

II. Si hacemos $g(x)=x^2-2x-3$ entonces el conjunto solución de $g(x)=f(x)$ es $\left\{-\sqrt{3};\ 3\right\}$.

III. Si hacemos $h(x)=x^2-3x+5$ entonces el conjunto de $h(x)=f(x)$ es vacío.

A) VFV B) VFF C) VVV
D) FVV E) FVF

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

I. **Verdadera**

Esto se debe a que

$$f(x+y)\leq f(x)+f(y)$$

$$\leftrightarrow\ |x+y|-x-y\leq |x|-x+|y|-y$$

$$\leftrightarrow\ |x+y|\leq |x|+|y|$$

Esta desigualdad es verdadera $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}$.

II. **Verdadera**

Tenemos que

$$f(x)=g(x)\ \ \leftrightarrow\ \ |x|-x=x^2-2x-3$$

Si $x\geq 0$:

$$\underbrace{|x|-x}_{=0}=x^2-2x-3$$

$$\leftrightarrow\ 0=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$$

Como $x\geq 0\ \ \rightarrow\ \ x=3$

Si $x<0$:

$$\underbrace{|x|-x}_{=-2x}=x^2-2x-3\ \ \leftrightarrow\ \ -2x=x^2-2x-3$$

$$\leftrightarrow\ 3=x^2$$

Como $x<0\ \ \rightarrow\ \ x=-\sqrt{3}$

$$\rightarrow\ f(x)=g(x)\ \ \leftrightarrow\ \ \text{CS}=\left\{-\sqrt{3};\ 3\right\}$$

III. **Verdadera**

Tenemos $h(x)=f(x)\ \ \leftrightarrow\ \ x^2-3x+5=|x|-x$

Si $x>0$: $x^2-3x+5=\underbrace{|x|-x}_{=0}$

$$\leftrightarrow\ x^2-3x+5=0$$

Como Δ: $(-3)^2-4(1)(5)=-11<0$

no tiene soluciones reales.

Si $x<0$: $x^2-3x+5=\underbrace{|x|-x}_{-2x}$

$$\leftrightarrow\ x^2-3x+5=-2x\ \ \leftrightarrow\ \ x^2-x+5=0$$

Como Δ: $(-1)^2-4(1)(5)=-19<0$, no hay soluciones reales.

De ahí se deduce que el conjunto solución es el vacío.

Respuesta

VVV

PREGUNTA N.° 12

Indique el intervalo al cual pertenece el valor de m, para que la inecuación

$$\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1}<m$$

se cumpla para todo $x \in \mathbb{R}$.

A) $\left\langle -\infty; -\dfrac{13}{3}\right\rangle$

B) $\langle 1; +\infty\rangle$

C) $\langle 2; +\infty\rangle$

D) $\langle 3; 9\rangle$

E) $\langle 5; +\infty\rangle$

Resolución

Tema: Inecuación fraccionaria

Tenga en cuenta el teorema del trinomio positivo.

$ax^2+bx+c>0;\ \forall\, x\in\mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad \Delta<0 \wedge a>0$

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1}<m;\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Como el denominador es siempre positivo, pues su $\Delta<0$,

$\rightarrow\ 4+x-4x^2<m\left(x^2-x+1\right);\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$

Al efectuar operaciones, se tiene que

$$(m+4)x^2-(m+1)x+(m-4)>0;\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Aplicamos el teorema del trinomio positivo.

- $m+4>0 \quad \rightarrow \quad m>-4$
- $\Delta<0$

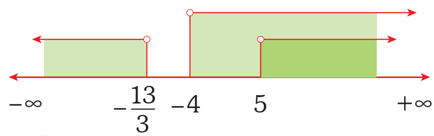
$$(m+1)^2-4(m+4)(m-4)<0$$

$$-3m^2+2m+65<0 \quad \times(-1)$$

$$3m^2-2m-65>0$$

$$(3m+13)(m-5)>0$$

Usamos los puntos críticos en la recta numérica.



$\therefore \quad m\in\langle 5; +\infty\rangle$

Respuesta

$\langle 5; +\infty\rangle$

PREGUNTA N.° 13

Sea una función f: $\mathbb{R}\rightarrow\langle 0; +\infty\rangle$ que cumple $f_{(a+b)}=f_{(a)}\cdot f_{(b)}$; $\forall\ a; b\in\mathbb{R}$. Calcule el valor de $f_{(a)}\cdot f_{(-a)}$.

A) -1 B) 0 C) 1

D) 2 E) 3

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Se tiene que

$$f\!: \mathbb{R}\rightarrow\langle 0; +\infty\rangle$$

$$f_{(a+b)}=f_{(a)}f_{(b)};\quad \forall\ a; b\in\mathbb{R}$$

Damos valores a a y b.

- $a=b=0 \;\rightarrow\; f_{(0)}=f_{(0)}f_{(0)}$

  $\rightarrow\; f_{(0)}=0 \vee f_{(0)}=1$

  Como $f_{(0)}\in\langle 0;\,+\infty\rangle \;\rightarrow\; f_{(0)}=1$

  Descartamos $f_{(0)}=0$

- $b=-a \;\rightarrow\; f_{(a+-a)}=f_{(a)}\,f_{(-a)}$

  $f_{(0)}=f_{(a)}f_{(-a)}$

$\therefore\; f_{(a)}f_{(-a)}=1$

Respuesta

1

PREGUNTA N.° 14

Considere la siguiente función f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f_{(x)}=ax^2+bx+c$; $a>0$; $b>0$. Si $f_{(0)}=2$ y $\text{Ran}(f)=[b;\,+\infty\rangle$, determine el siguiente valor

$$M=\frac{8a-b^2}{ab}$$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Se tiene f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$$f_{(x)}=ax^2+bx+c;\quad a>0 \wedge b>0$$

Como

$$f_{(0)}=2 \;\rightarrow\; c=2$$

Luego

$$f_{(x)}=ax^2+bx+2$$

Completamos cuadrados

$$f_{(x)}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+2-\frac{b^2}{4a}$$

De aquí

$$\text{Ran}(f)=\left[2-\frac{b^2}{4a};+\infty\right\rangle$$

Por dato

$$\text{Ran}(f)=[b;\,+\infty\rangle$$

Entonces

$$b=2-\frac{b^2}{4a} \quad \times(4a)$$

$$4ab=8a-b^2$$

$$\frac{8a-b^2}{ab}=4$$

Nos piden

$$M=\frac{8a-b^2}{ab}$$

$\therefore\; M=4$

Respuesta

4

PREGUNTA N.º 15

Sea f una función cuya regla de correspondencia está dada por

$$f_{(x)}=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Encuentre su función inversa.

A) a^x+a^{-x}

B) $\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

C) a^x-a^{-x}

D) $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

E) $\dfrac{a^x}{2}$

Resolución

Tema: Función inversa

Recuerde que

Si f: $A \to B$ es una función biyectiva, entonces

- existe la función inversa de f y se denota por f^*.
- $(x; y) \in f \quad \leftrightarrow \quad (y; x) \in f^*$
- $f_{(x)}=y \quad \leftrightarrow \quad f^*_{(y)}=x$

Análisis y procedimiento

$$\underbrace{f_{(x)}=y}\quad \leftrightarrow \quad f^*_{(y)}=x$$

$$\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=y$$

$$\to \sqrt{x^2+1}+x=a^y \qquad \text{(I)}$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{a^y}$$

$$\to \sqrt{x^2+1}-x=a^{-y} \qquad \text{(II)}$$

Restamos (I) – (II): $2x=a^y-a^{-y}$

$$x=\frac{a^y-a^{-y}}{2}$$

Pero

$$x=f^*_{(y)} \quad \to \quad f^*_{(y)}=\frac{a^y-a^{-y}}{2}$$

$$\therefore \; f^*_{(x)}=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

Respuesta

$\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

PREGUNTA N.º 16

Si A es una matriz invertible, despeje la matriz X a partir de la expresión

$$\left((AX)^{-1}\right)^t=0{,}5\,B^{-1}$$

A) $X=0{,}5\,A^{-1}B^t$

B) $X=0{,}5\,B^tA^{-1}$

C) $X=2\,A^{-1}B$

D) $X=2\,B^{-1}A^t$

E) $X=2\,A^{-1}B^t$

Resolución

Tema: Matrices

Recuerde que si M es una matriz invertible y λ es un escalar no nulo, entonces

- $\left(M^t\right)^t=M$
- $\left(M^{-1}\right)^t=\left(M^t\right)^{-1}$
- $(\lambda M)^t=\lambda M^t$

- $\left(M^{-1}\right)^{-1}=M$
- $M \cdot M^{-1}=M^{-1} \cdot M=I$
- $(\lambda M)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda} M^{-1}$

Análisis y procedimiento

Aplicamos transpuesta en cada miembro.

$$\left[\left((AX)^{-1}\right)^{t}\right]^{t}=\left[0,5\, B^{-1}\right]^{t}$$

$$\rightarrow\ (AX)^{-1}=0,5\left(B^{-1}\right)^{t}$$

Aplicamos inversa en cada miembro.

$$\left[(AX)^{-1}\right]^{-1}=\left[0,5\left(B^{-1}\right)^{t}\right]^{-1}$$

$$\rightarrow\ AX=\frac{1}{0,5}\left(\left(B^{t}\right)^{-1}\right)^{-1}$$

$$AX=2B^{t}$$

Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en cada miembro.

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I} X=A^{-1}\cdot 2B^{t}$$

$$\therefore\ X=2A^{-1}\cdot B^{t}$$

Respuesta

$X=2A^{-1}\, B^{t}$

PREGUNTA N.° 17

Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x^{2}+y^{2}-2x-2y+1=0 \\ \quad x^{2}-2x-\ y+1=0 \end{cases}$$

A) $\{(3;1),(1;1),(-1;-1)\}$
B) $\{(2;-2),(2;1),(1;1)\}$
C) $\{(-1;0),(1;1),(1;2)\}$
D) $\{(1;0),(0;1),(2;1)\}$
E) $\{(1;-1),(1;0),(2;-1)\}$

Resolución

Tema: Sistemas de ecuaciones

Análisis y procedimiento

Ordenando las ecuaciones, se obtiene

$$\begin{cases} x^{2}-2x+1+y^{2}-2y=0 & \text{(I)} \\ \quad x^{2}-2x+1-y=0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Restando (I)–(II) obtenemos

$$y^{2}-y=0$$

$$\rightarrow\ (y)(y-1)=0\ \leftrightarrow\ y=0\ \vee\ y=1$$

- Si $y=0$, reemplazamos en (II).

  $x^{2}-2x+1=0\ \leftrightarrow\ (x-1)^{2}=0$

  $\leftrightarrow\ x=1$

  Entonces, $(1;0)$ es solución.

- Si $y=1$, reemplazamos en (II).

  $x^{2}-2x=0\ \leftrightarrow\ (x)(x-2)=0$

  $\leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x=2$

  Entonces, $(0;1)$ y $(2;1)$ son soluciones.

$\therefore\ CS=\{(1;0),(0;1),(2;1)\}$

Respuesta

$\{(1;0),(0;1),(2;1)\}$

PREGUNTA N.° 18

Un granjero tiene 480 acres de tierra en la que puede sembrar maíz o trigo. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación de verano. En el caso del maíz, el trabajo demora 2 horas por acre y se obtiene una utilidad de S/.40 por acre, mientras que en el trigo el trabajo es de 1 hora por acre y la utilidad es de S/.30 por acre. ¿Cuántos acres de maíz y trigo debe plantar respectivamente, para maximizar su utilidad?

A) (160, 320)
B) (140, 340)
C) (340, 140)
D) (320, 160)
E) (180, 300)

Resolución

Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

Sean x: número de acres de maíz
y: número de acres de trigo

Consideremos el siguiente cuadro.

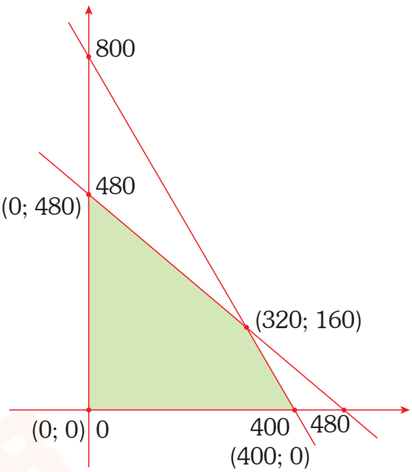
	Horas de trabajo	Utilidades
Maíz (x)	$2x$	$40x$
Trigo (y)	y	$30y$
Total	800	$40x+30y$

horas disponibles

Luego, el problema de programación lineal sería maximizar $f_{(x;\,y)}=40x+30y$

$$\text{sujeto a}\begin{cases} x+y\le 480\\ 2x+y\le 800\\ x\ge 0;y\ge 0\end{cases}$$

Graficamos la región factible.



Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.

$f_{(0;\,0)}=40(0)+30(0)=0$

$f_{(0;\,480)}=40(0)+30(480)=14\,400$

$f_{(400;\,0)}=40(400)+30(0)=16\,000$

$f_{(320;\,160)}=40(320)+30(160)=17\,600$ ← máximo valor

Por lo tanto, para maximizar la utilidad se requieren 320 acres de maíz y 160 acres de trigo.

Respuesta

(320; 160)

PREGUNTA N.° 19

Considere la sucesión

$$\left\{1;\ \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{3^2};\ \ldots;\ \frac{1}{n^2};\ \ldots\right\}.$$

Determine el menor valor de $n\in\mathbb{N}$, de modo que se cumpla $\dfrac{1}{n^2}<1\times 10^{-7}$

A) 2081
B) 2091
C) 2991
D) 3001
E) 3163

Resolución

Tema: Sucesiones

Análisis y procedimiento

De la condición

$$\frac{1}{n^2} < 1\times 10^{-7}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10^7}$$

$$\rightarrow\ n^2 > 10^7$$

$$n^2 > 10\times 10^6$$

$$\rightarrow\ n > \underbrace{\sqrt{10}\quad 10^3}$$

$$n > 3162{,}27766$$

$$\rightarrow\ n \in \{3163;\ 3164;\ 3165;\ ...\}$$

Por lo tanto, el menor valor de $n \in \mathbb{N}$ es 3163.

Respuesta

3163

PREGUNTA N.° 20

Halle el menor grado del polinomio $x^n + ax + b$, $a\neq 0$, $(n>1)$ para que x^2-1 sea un divisor.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Tema: División algebraica

Análisis y procedimiento

Como (x^2-1) es un divisor de (x^n+ax+b), entonces $\dfrac{x^n+ax+b}{x^2-1}$ es una división exacta.

Por el teorema del resto

$$x^2-1=0$$

$$\rightarrow\ x^2=1$$

- Si $n=2$

  $$R_{(x)}=x^2+ax+b$$
  $$=1+ax+b$$

  Para que $R_{(x)}\equiv 0$, se cumple que $a=0$ y $b=-1$, lo cual contradice la condición $a\neq 0$.

  $\rightarrow\ n\neq 2$

- Si $n=3$

  $$R_{(x)}=x^3+ax+b$$
  $$=x^2\cdot x+ax+b$$
  $$=1\cdot x+ax+b$$
  $$=(a+1)x+b$$

  Para que $R_{(x)}=0$, se cumple que $a=-1$ y $b=0$, lo cual no contradice ninguna condición.

Por lo tanto, el menor grado del polinomio es $n=3$.

Respuesta

3

PREGUNTA N.° 21

El punto P se encuentra situado sobre la altura de un tetraedro regular de lado a. Si P equidista de cada vértice, calcule esta distancia.

A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

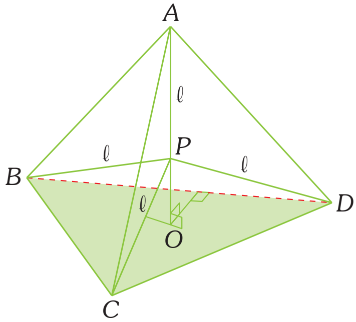
D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ E) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Resolución

Tema: Tetraedro regular

En los tetraedros regulares si $PA=PB=PC=PD$, entonces P es el centro de la esfera circunscrita al tetraedro regular y se cumple que

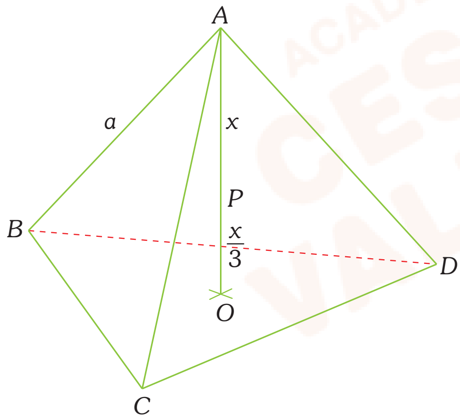
$$\frac{OP}{PA}=\frac{1}{3}$$



Análisis y procedimiento

Nos piden $AP=x$.

Sea el tetraedro regular A-BCD.



Sabemos que $OP=\dfrac{AP}{3}$, entonces $OP=\dfrac{x}{3}$.

Pero $\overline{AO}$ es altura del tetraedro,

$$AO=\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{4x}{3}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Respuesta

$\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

PREGUNTA N.° 22

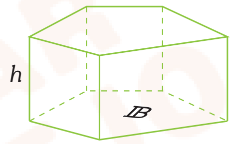
Un vaso de forma de prisma recto exagonal, con diagonal mayor de la base que mide 6 cm, contiene agua "al tiempo". Para enfriarla se coloca un cubo de hielo y se observa que el nivel del agua sube 2 cm. Calcule la longitud de la arista del cubo de hielo (en cm).

A) 3 B) $3\sqrt[6]{3}$ C) $3\sqrt[4]{3}$
D) $3\sqrt[3]{3}$ E) $3\sqrt{3}$

Resolución

Tema: Prisma

Volumen



donde

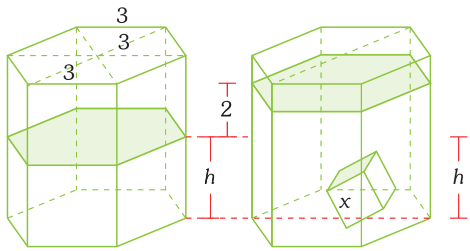
- $\mathbb{B}$: área de la base
- h: altura

volumen $=\mathbb{B}\cdot h$

Análisis y procedimiento

Nos piden (longitud de la arista del cubo) $=x$

Dato: (diagonal mayor de la base) $=6$ cm



El nivel del agua se eleva 2 cm; entonces, el volumen del agua desplazada por el cubo será

$\dfrac{6(3)^2\sqrt{3}}{4}\ 2=27\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ y es igual al volumen del cubo.

Luego $27\sqrt{3}=x^3$

$$\therefore \quad x=3\sqrt[6]{3}$$

Respuesta

$3\sqrt[6]{3}$

PREGUNTA N.° 23

En un cilindro de revolución de 5 cm de altura se inscribe un paralelepípedo rectangular con superficie lateral de 250 cm^2. Una de sus aristas, ubicada en la base del cilindro, mide 16 cm. Calcule la razón (en cm) entre el volumen y el área lateral del cilindro.

A) $\dfrac{\sqrt{337}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{337}}{2}$ C) $\dfrac{337}{4}$

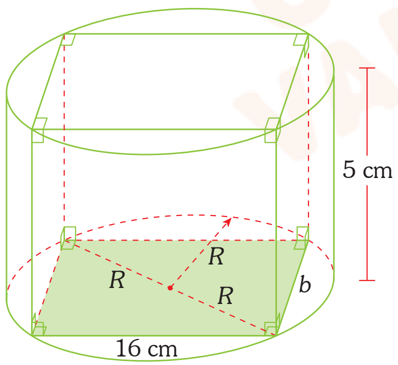
D) $\dfrac{337}{2}$ E) $\sqrt{337}$

Resolución

Tema: Cilindro de revolución

Análisis y procedimiento

Nos piden $\dfrac{\mathbb{V}_c}{\mathbb{A}_{SLc}}=x$



Donde

$\mathbb{V}_c$: volumen del cilindro de revolución

$\mathbb{A}_{SLc}$: área de la superficie lateral del cilindro

Calculamos

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{V}_c=\pi R^2(5\text{ cm})\\ \mathbb{A}_{SLc}=2\pi R(5\text{ cm})\end{array}\right\}(\div)$$

De la división

$$x=\frac{R}{2} \qquad (*)$$

Del dato

$$\mathbb{A}_{SL(\text{paralelepípedo})}=250\text{ cm}^2$$

$$(32+2b)\text{ cm}\times 5\text{ cm}=250\text{ cm}^2$$

$\rightarrow$ $b=9$ m

En la base

$$(2R)^2=(16)^2+(9)^2$$

$$R=\frac{\sqrt{337}}{2}$$

Luego, reemplazamos en $(*)$.

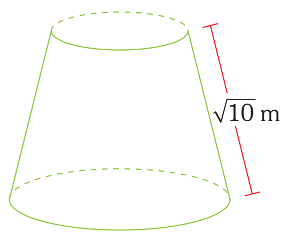
$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{337}}{4}$$

Respuesta

$\dfrac{\sqrt{337}}{4}$

PREGUNTA N.° 24

En la Panamericana cerca de Casma se ha formado una duna en forma de tronco de cono de revolución. Las longitudes de las circunferencias son 4π m y 2π m. Ver figura. Halle el volumen de la duna en metros cúbicos.



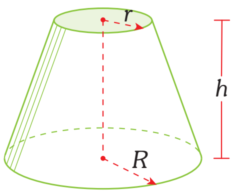
A) 3π B) 5π C) 7π

D) 10π E) 11π

Resolución

Tema: Tronco de cono de revolución

Recuerde que



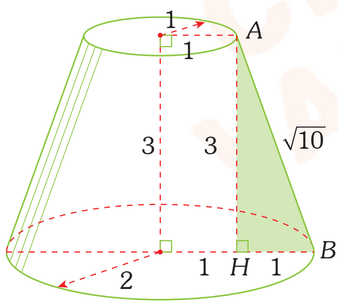
$$\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cono}\\ \text{de revolución}}}=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$$

Análisis y procedimiento

Nos piden el volumen del tronco de cono de revolución (duna): $\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cono}\\ \text{de revolución}}}$.

Datos

Las longitudes de las circunferencias de las bases son 2π y 4π.



De los datos, los radios de las bases miden 1 y 2.

Luego, trazamos $\overline{AH}\perp\overline{HB}$.

En el $\triangle AHB$, $AH=3$.

Nos piden

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cono}\\ \text{de revolución}}}=\frac{\pi}{3}(3)\left(2^2+1^2+(2)(1)\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cono}\\ \text{de revolución}}}=7\pi$$

Respuesta

7π

PREGUNTA N.° 25

En un tronco de cono de revolución el radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor. Si el volumen del tronco de cono es 336π cm^3 y el radio de la base menor es 6 cm, entonces el volumen de una esfera tangente a las bases del tronco de cono (en cm^3) es:

A) $\dfrac{30}{3}\pi$ B) $\dfrac{31}{3}\pi$ C) $\dfrac{32}{3}\pi$

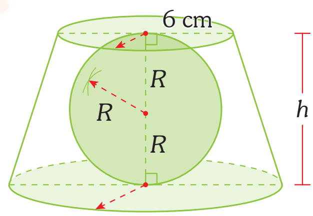
D) $\dfrac{33}{3}\pi$ E) $\dfrac{34}{3}\pi$

Resolución

Tema: Tronco de cono de revolución

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}_{\text{esfera}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$



Se observa que $h=2R$.

Del dato $\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{cono}}}=336\pi$

$$\frac{h}{3}\pi\left(6^2+12^2+(6)(12)\right)=336\pi$$

$$h=4$$

$$\to\ R=2$$

$$\therefore\ \mathbb{V}_{\text{esfera}}=\frac{32}{3}\pi$$

Respuesta

$\dfrac{32}{3}\pi$

PREGUNTA N.° 26

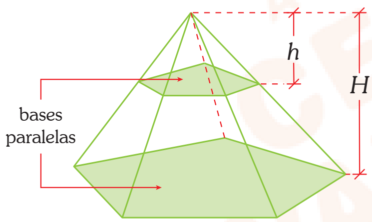
En una pirámide cuadrangular regular la arista básica mide 8 u y su altura mide 15 u. ¿A qué distancia (en u) de la base de la pirámide se debe trazar un plano paralelo a dicha base, para que el volumen del prisma recto, que tiene por base a dicha sección y por altura la distancia de la sección al vértice de la pirámide, sea los 3/8 del volumen de la pirámide?

A) 9,5 B) 8,5 C) 7,5
D) 6,5 E) 5,5

Resolución

Tema: Pirámide

Pirámides semejantes

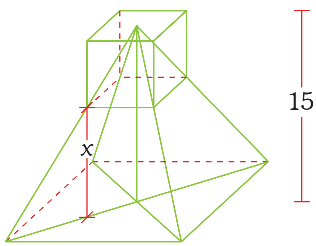


$$\frac{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{menor}}}}{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{mayor}}}}=\left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Análisis y procedimiento

Nos piden x.

Dato: $\mathbb{V}_{\text{prisma}}=\dfrac{3}{8}\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{mayor}}}$



Como $\mathbb{V}_{\text{prisma}}=3\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{menor}}}$

Entonces

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{mayor}}}=8\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{menor}}}$$

Por semejanza de pirámides

$$\frac{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{mayor}}}}{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\\text{menor}}}}=\frac{15^3}{(15-x)^3}$$

$$8=\frac{15^3}{(15-x)^3}$$

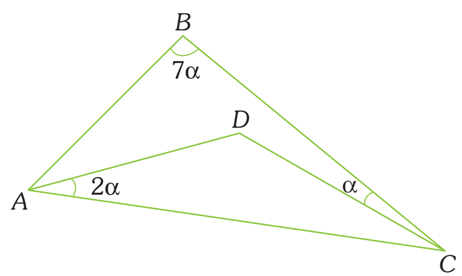
$$\therefore\ x=7,5$$

Respuesta

7,5

PREGUNTA N.° 27

En el gráfico $AB=AD=DC$, calcule α (en grados).



A) 8
B) 9
C) 10
D) 12
E) 13

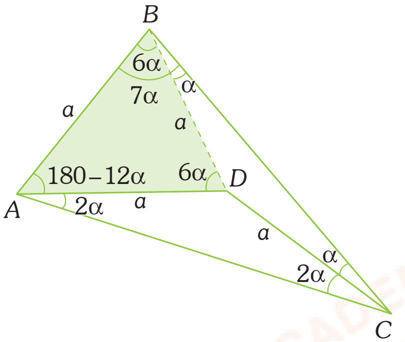
Resolución

Tema: Triángulos

Análisis y procedimiento

Nos piden α.

Dato: $AB=AD=DC$



Sea $AB=AD=DC=a$

En el $\triangle ABC$, $m\measuredangle BAD=180°-12\alpha$.

Luego, como el triángulo ABD es isósceles,

$m\measuredangle ABD=m\measuredangle ADB=6\alpha$

Luego, $m\measuredangle DBC=\alpha$

Además, $BD=DC=a$

En el $\triangle ABD$, $AB=AD=BD=a$, sabemos

$6\alpha=60°$

$\therefore\ \alpha=10°$

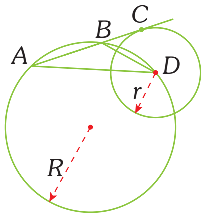
Respuesta

10

PREGUNTA N.° 28

En la figura las circunferencias tienen radios $r=3$ u y $R=6$ u respectivamente, C es punto de tangencia y D es centro. Calcule producto $DA\cdot DB$ (en u^2).

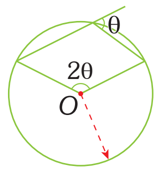
A) 18
B) 24
C) 30
D) 36
E) 40



Resolución

Tema: Semejanza de triángulos

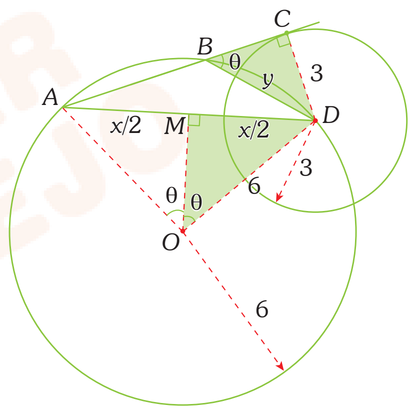
Recuerde que si O es centro de la circunferencia, entonces



Análisis y procedimiento

Nos piden $(DA)\cdot(DB)=x\cdot y$

Datos: $r=3$ y $R=6$



Sea O el centro de la circunferencia mayor.

Trazamos $\overline{AO}$ y $\overline{OD}$, entonces $m\measuredangle AOD=2\theta$ y $m\measuredangle DBC=\theta$

En el triángulo AOD, trazamos la altura $\overline{OM}$, entonces $AM=MD=\dfrac{x}{2}$ y $m\measuredangle AOM=m\measuredangle DOM=\theta$.

Se observa que $⊿OMD$ y $⊿DBC$ son semejantes, entonces

$$\frac{\frac{x}{2}}{3}=\frac{6}{y}$$

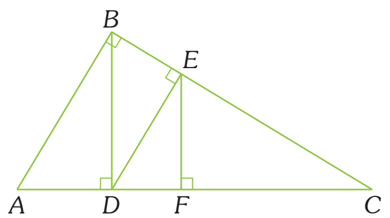
$\therefore\ x\cdot y=36$

Respuesta

36

PREGUNTA N.° 29

En la figura se muestra el triángulo rectángulo *ABC* recto en *B*. Si $AB=5$ cm y $AD=3$ cm, entonces la medida (en cm) del segmento $\overline{EF}$ es



A) 2,14 B) 2,16 C) 2,25
D) 2,56 E) 2,82

Resolución

Tema: Triángulos notables

Análisis y procedimiento

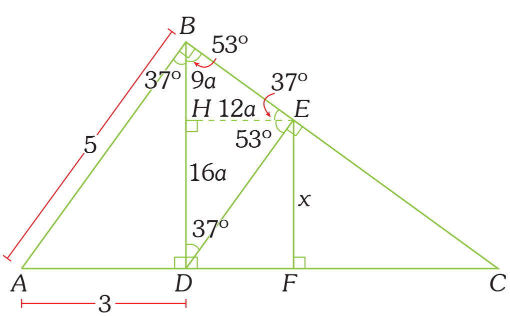
Nos piden *x*.

Trazamos $\overline{EH}\perp\overline{BD}$

Si $HE=12a$

$\rightarrow$ $BD=9a+16a=4$

$$a=\frac{4}{25}$$



Luego

$x=16a$

Reemplazamos

$$x=16\left(\frac{4}{25}\right)\rightarrow x=\frac{64}{25}$$

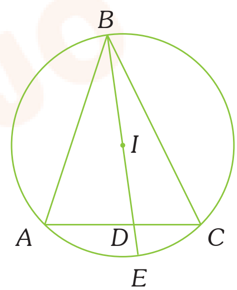
$\therefore$ $x=2,56$

Respuesta

2,56

PREGUNTA N.° 30

En la siguiente figura, *I* es el incentro del triángulo *ABC*, $BI=6$ u, $DE=1$ u. Calcule *BE* (en u).



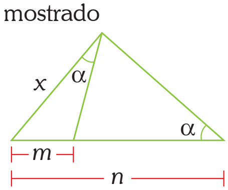
A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

Tema: Semejanza de triángulos

Recordemos el teorema de las antiparalelas.

En el gráfico mostrado



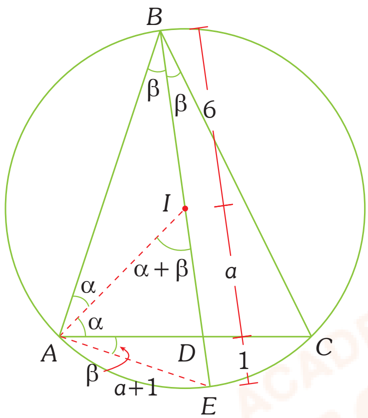
se cumple

$$\boxed{x^2=mn}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden BE.

Datos: $BI=6$, $DE=1$



Como I es el incentro del $\triangle ABC$, $\overline{BD}$ es bisectriz interior; entonces, $m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle CBD=\beta$.

Trazamos $\overline{AI}$; entonces, $m\sphericalangle BAI=m\sphericalangle CAI=\alpha$.

Se observa que el $\triangle AIE$ es isósceles, $AE=IE=1+x$.

En el $\triangle ABE$, la $m\sphericalangle ABE=m\sphericalangle EAD=\beta$; entonces, por teorema de las antiparalelas

$$(a+1)^2=(1)(a+7)$$

$\rightarrow\ a=2$

Luego, $BE=6+2+1$

$\therefore\ BE=9$

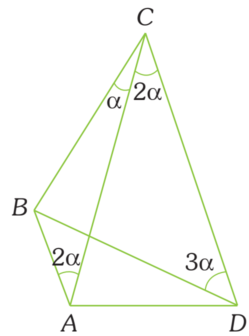
Respuesta

9

PREGUNTA N.° 31

En la figura $AC=CD$, $AD=6$ u y área $(\triangle BCD)=r(\text{área}\triangle ABD)$. Halle r.

A) $1+\sqrt{3}$
B) $2+\sqrt{3}$
C) $2-\sqrt{3}$
D) $1+2\sqrt{3}$
E) $2\sqrt{3}-1$



Resolución

Tema: Áreas de regiones triangulares

Análisis y procedimiento

Nos piden r.

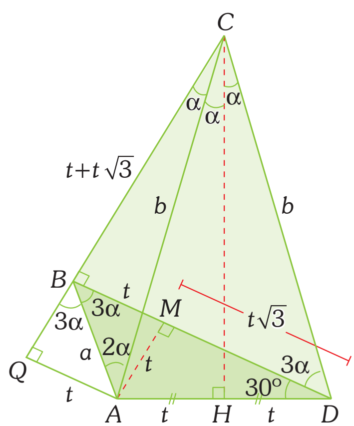
Dato: $\mathbb{A}_{\triangle BCD}=(r)\mathbb{A}_{\triangle ABD}$ (I)

Por teorema de la bisectriz ($\overrightarrow{BA}$)

$AQ=AM=t$

Análogamente ($\overrightarrow{CA}$, bisectriz)

$AQ=AH=t$



Observamos que $\triangle AMD$ es notable de 30° y 60°.

$m\measuredangle BDA=30°$

En el $\triangle CHD$: $4\alpha=60°$

$\alpha=15°$

$\rightarrow\ m\measuredangle CBD=90°$

En (I)

$$\frac{\left(t+t\sqrt{3}\right)\left(t+t\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{r\left(t+t\sqrt{3}\right)t}{2}$$

$\therefore\ r=1+\sqrt{3}$

Respuesta

$1+\sqrt{3}$

PREGUNTA N.° 32

ABCD es un cuadrado y desde su centro *O* se traza un segmento $\overline{OE}$ perpendicular al plano *ABC*, si *OE*=*AB* entonces la medida del diedro *E*-*DC*-*B* es

A) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

B) $\arctan(1)$

C) $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

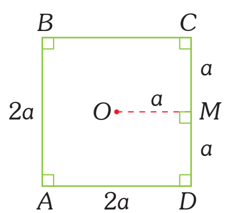
D) $\arctan(2)$

E) $\arctan\left(\frac{5}{2}\right)$

Resolución

Tema: Ángulo diedro

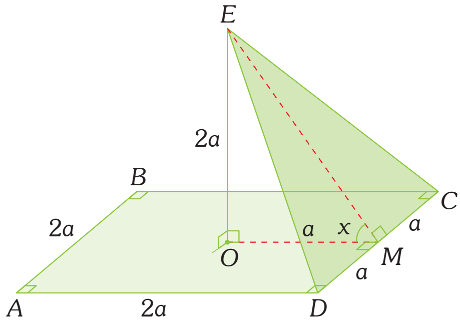
Si *O* es el centro del cuadrado *ABCD*, entonces



Análisis y procedimiento

Nos piden la medida del diedro *E*-*DC*-*B*=*x*.

Datos: $\overline{OE}$ es perpendicular al plano *ABC*, y *OE*=*AB*



Sea 2*a* la longitud del lado del cuadrado *ABCD*. Entonces, *OE*=2*a*.

Luego, por el teorema de las tres perpendiculares tenemos

- $\overline{OE}$: 1.ª perpendicular
- $\overline{OM}$: 2.ª perpendicular
- $\overline{EM}$: 3.ª perpendicular

Se observa que *x* es la medida del diedro *E*-*DC*-*B*.

Por teorema, *OM*=*a*, y en el $\triangle EOM$, *OE*=2*a* y *OM*=*a*

$\rightarrow\ x=\arctan\left(\frac{2a}{a}\right)$

$\therefore\ x=\arctan(2)$

Respuesta

arctan(2)

PREGUNTA N.° 33

Si $x\in\left\langle \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ entonces determine los valores de

$y=4-9\csc^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

A) $\langle -\infty;\ -12\rangle$ B) $\langle -\infty;\ -11\rangle$ C) $\langle -\infty;\ -10\rangle$
D) $\langle -\infty;\ -9\rangle$ E) $\langle -\infty;\ -8\rangle$

Resolución

Tema: Circunferencia trigonométrica

Análisis y procedimiento

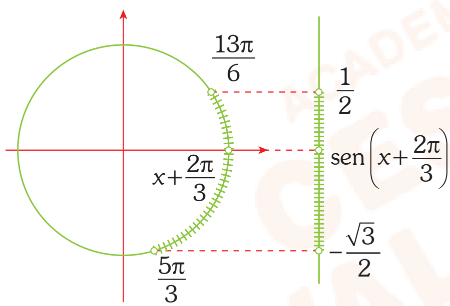
De la condición

$$y=4-9\csc^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Además

$$x\in\left\langle \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle,\ x\neq\frac{4\pi}{3}$$

$$x+\frac{2\pi}{3}\in\left\langle \frac{5\pi}{3};\ \frac{13\pi}{6}\right\rangle,\ x+\frac{2\pi}{3}\neq 2\pi$$



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)<\frac{1}{2},\ \operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0$$

$$0<\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)<\frac{3}{4}$$

$$\csc^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{4}{3}$$

$$-9\csc^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)<-12$$

$$4-9\csc^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)<-8$$

$$y<-8$$

$$\therefore\ y\in\langle-\infty;\ -8\rangle$$

Respuesta

$\langle-\infty;\ -8\rangle$

PREGUNTA N.º 34

Al simplificar la expresión

$$K=\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}(2x))$$

se obtiene

A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(2x)$

B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}^2(2x)$

C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec(2x)$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\csc(x)$

E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas de ángulos compuestos

Recuerde que

$$\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

Análisis y procedimiento

$$K=\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$K=\left[1-\operatorname{sen}^2(60^\circ+x)-(1-\operatorname{sen}^2(60^\circ-x))-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$K=\left[\operatorname{sen}^2(60^\circ-x)-\operatorname{sen}^2(60^\circ+x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$K=\left[\operatorname{sen}(120^\circ)\operatorname{sen}(-2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$K=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{sen}2x+1)\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$K=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\operatorname{sen}^2 2x)\ \rightarrow\ K=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 2x$$

Respuesta

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(2x)$

PREGUNTA N.° 35

Si $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ y $\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}} = \tan\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2a}\right)$, calcule el valor de (a^2+1).

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas del ángulo doble.

Recuerde que

$$2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta$$
$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

Análisis y procedimiento

Condición

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}} = \tan\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} = \tan\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}} = \tan\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2a}\right)$$

$$\sqrt{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2a}\right)$$

$$\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2a}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{x}{a}\right)$$

Comparando se obtiene $a=2$

$\therefore\ a^2+1=5$

Respuesta

5

PREGUNTA N.° 36

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3}{\arctan(x) - x}$.

Dadas las siguientes proposiciones:

I. La función f es impar.
II. Si $x \in \operatorname{Dom}(f)$, entonces $-x \in \operatorname{Dom}(f)$.
III. La gráfica de f corta a la curva $y=x^2$.

Son correctas:

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas inversas

- **Función par.** Una función f es par si se cumple que
  $f_{(-x)}=f_{(x)} \quad \forall\ x; -x \in \operatorname{Dom}(f)$
- **Función impar**. Una función f es impar si se cumple que
  $f_{(-x)}=-f_{(x)} \quad \forall\ x; -x \in \operatorname{Dom}(f)$

Análisis y procedimiento

Dato: $f_{(x)} = \dfrac{x^3}{\arctan x - x}$

$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

I. **Incorrecta**

La función f es impar.

Veamos

$$f_{(-x)} = \frac{(-x)^3}{\arctan(-x) - (-x)}$$

$$f_{(-x)} = \frac{x^3}{\arctan x - x}$$

$$f_{(-x)} = f_{(x)}$$

II. **Correcta**

Como la función es par, si $x \in \operatorname{Dom}(f)$, entonces $-x \in \operatorname{Dom}(f)$.

III. **Incorrecta**

La gráfica de f corta a la curva $y=x^2$.

Veamos

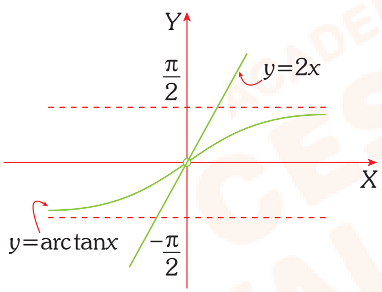
Supongamos que f corta a la curva $y=x^2$, entonces $f_{(x)}=x^2$; $x\neq 0$.

$$\frac{x^3}{\arctan x - x} = x^2$$

$$\frac{x}{\arctan x - x} = 1$$

$\rightarrow$ $\arctan x = 2x$

Graficamos.



Observamos que si $\arctan x=2x$, entonces $x=0$; pero $x\neq 0$.

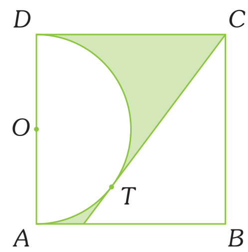
Por lo tanto, las gráficas de f y de $y=x^2$ no se cortan.

Respuesta

solo II

PREGUNTA N.° 37

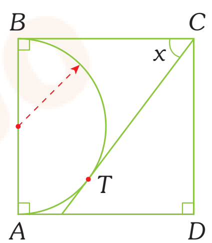
Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 2 u y T es un punto de tangencia, entonces el área sombreada (en u^2) es igual a: (O centro de la circunferencia que pasa por A, T y D)



A) 0,57 B) 0,68 C) 0,79
D) 0,81 E) 0,92

Resolución

Tema: Áreas de regiones planas

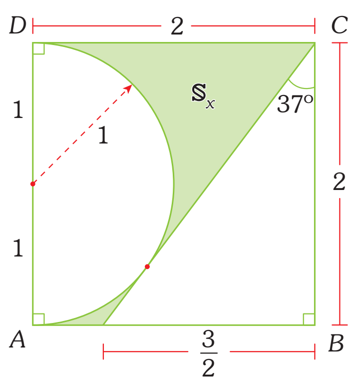


Si $ABCD$ es cuadrado y T es punto de tangencia

$\rightarrow$ $x=53°$

Análisis y procedimiento

Nos piden el área de la región sombreada: $\mathbb{S}_x$.



Por diferencias, $\mathbb{S}_x=\mathbb{A}_{\square}-\mathbb{A}_{\triangle}-\mathbb{A}_{\frown}$

$$\mathbb{S}_x=2^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow\ \mathbb{S}_x=\frac{5-\pi}{2}$$

Como

$$\pi\approx 3{,}1415$$

$$\rightarrow\ \mathbb{S}_x=\frac{1{,}8585}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{S}_x=0{,}9292$$

Respuesta

0,92

PREGUNTA N.° 38

En todo triángulo ABC la suma de los cuadrados de sus lados es igual a

$K(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)$

donde K vale:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) 2 E) 4

Resolución

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos

En todo triángulo ABC, se cumple que

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Análisis y procedimiento

Por condición

$$a^2+b^2+c^2=K(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)\quad \text{(I)}$$

Pero

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Al sumar, se obtiene

$$2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2\quad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se concluye que $K=2$.

Respuesta

2

PREGUNTA N.° 39

Al resolver la ecuación

$\text{sen}(2x)-12(\text{sen}(x)-\cos(x))+12=0$,

obtenemos como soluciones:

A) $k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

B) $2k\pi$ y $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

C) $2k\pi$ y $k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

D) $(2k+1)\pi$ y $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

E) $(3k+1)\pi$ y $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Resolución

Tema: Ecuaciones trigonométricas

Por identidades del ángulo doble.

- $1-\text{sen}2x=(\text{sen}x-\cos x)^2$
- $\text{sen}x-\cos x=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Análisis y procedimiento

De la condición

$$\text{sen}2x-12(\text{sen}x-\cos x)+12=0$$
$$-\text{sen}2x+12(\text{sen}x-\cos x)-12=0$$
$$1-\text{sen}2x+12(\text{sen}x-\cos x)-13=0$$

$$(\text{sen}x - \cos x)^2 + 12(\text{sen}x - \cos x) - 13 = 0$$

$$\begin{array}{lcr} \text{sen}x - \cos x & & 13 \\ \text{sen}x - \cos x & & -1 \end{array}$$

En consecuencia

$$(\text{sen}x - \cos x + 13)(\text{sen}x - \cos x - 1) = 0$$

$$\to \quad \text{sen}x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{sen}x - \cos x = 1$$

$$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}\,;\; x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4};\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\;;\; x = 2k\pi + \pi;\;\; k \in \mathbb{Z}$$

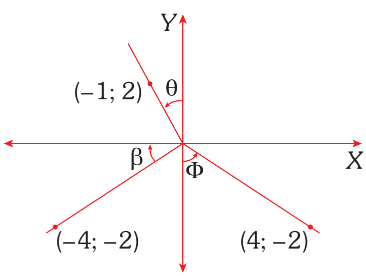
$$\therefore\;\; x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\;\;;\; x = (2k+1)\pi;\;\; k \in \mathbb{Z}$$

Respuesta

$(2k+1)\pi$ y $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi;\; k \in \mathbb{Z}$

PREGUNTA N.º 40

Del gráfico mostrado, el resultado de $E = \tan\theta + \tan\beta + \tan\Phi$, es:



A) −4 B) −2 C) 0
D) 2 E) 4

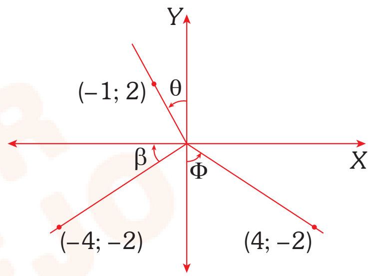
Resolución

Tema: Reducción al primer cuadrante

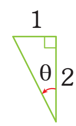
Por regla de reducción al primer cuadrante se cumple que $\tan(-x) = -\tan x$.

Análisis y procedimiento

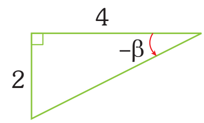
De la condición



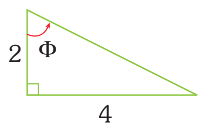
se obtienen los gráficos



$\tan\theta = 1/2$



$\tan(-\beta) = 2/4$



$\tan\Phi = 2$

Luego, $\tan\theta + \tan\beta + \tan\Phi$ será igual a 2.

Respuesta

2