solucionario

# 2013-II

Examen de admisión

## Matemática



### PARTE 1

### Pregunta N.° 1

Dadas las siguientes proposiciones:

I. Si $A$ es una matriz cuadrada tal que $A^2=A$, entonces $A^K=A$, $\forall K \in \mathbb{N}$.

II. Si $B$ es simétrica, entonces $-B^2$ es antisimétrica.

III. $C$ es matriz cuadrada tal que $C^K=0$ para algún $K \in \mathbb{N}$, entonces $I+\sum_{i=1}^{K} C^i$ es inversible.

Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

### Resolución

*Tema*: Matrices

Recordemos lo siguiente:

Sea $M$ una matriz cuadrada

- $M^T=M \quad \leftrightarrow \quad M$ es simétrica
- $M^T=-M \quad \leftrightarrow \quad M$ es antisimétrica
- $M$ es inversible $\quad \leftrightarrow \quad |M| \neq 0$

*Análisis y procedimiento*

I. **Verdadero**

Por dato $A^2=A$

Veamos:

$$A^3=A^2 \cdot A=A \cdot A=A^2=A$$
$$A^4=A^3 \cdot A=A \cdot A=A^2=A$$
$$\vdots$$
$$A^k=A^{k-1} \cdot A=A \cdot A=A^2=A$$

Entonces

$$A^k=A, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

II. **Falso**

Por dato $B$ es simétrica $\rightarrow B^T=B$

Para que $-B^2$ sea antisimétrica $(-B^2)^T=B^2$

Calculemos

$$(-B^2)^T=-(B^2)^T=-\underbrace{(B^T)}_{B}{}^2=-B^2$$

Luego como $(-B^2)^T=-B^2$, entonces $-B^2$ es simétrica.

III. **Verdadero**

Por dato $C^k=0$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos $M=I+\sum_{i=1}^{k} C^i$.

Para determinar si es invertible $M$, debemos demostrar que $|M| \neq 0$.

Veamos

$$M=I+C+C^2+C^3+\ldots+C^{k-1}+\underbrace{C^k}_{0}$$

$$M=I+C+C^2+C^3+\ldots+C^{k-1}$$

Multiplicamos por $C$

$$MC=(I+C+C^2+C^3+\ldots+C^{k-1})C$$

$$MC=\underbrace{(C+C^2+C^3+C^4+\ldots+C^k}$$

$$MC=M-I$$

$$I=M-MC$$

$$I=M(I-C)$$

Tomamos el determinante en ambos miembros

$$|I|=|M(I-C)|$$
$$1=|M|\,|I-C|$$
$$\rightarrow\ |M|\neq 0$$

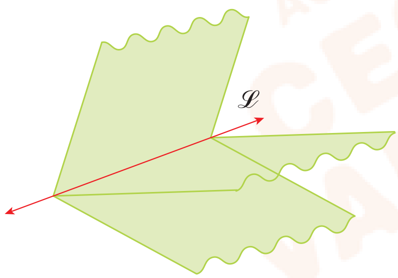
Por lo tanto, $M$ es invertible.

***Respuesta***

I y III

## Pregunta N.° 2

La siguiente figura da la idea de tres planos interceptándose según la recta $\mathscr{L}$. ¿Cuál(es) de los sistemas de ecuaciones dados representa a la figura dada?




I. $2x+3y-z=1$
$-x+5y+2z=4$
$x+8y+z=5$

II. $x-y+3z=-2$
$-2x+2y-6z=-4$
$-x+y-3z=2$

III. $2x-y+z=3$
$-x+3y-z=1$
$x-2y+2z=2$

A) Solo I B) I y III C) Solo III
D) I, II y III E) Solo II

### Resolución

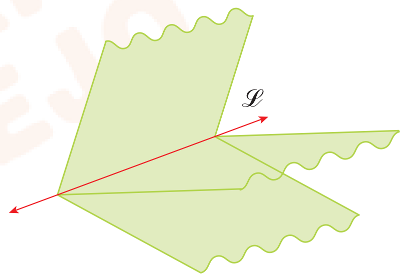
***Tema***: Sistema de ecuaciones lineales de 3 variables

Tenga en cuenta que

1. La gráfica de la ecuación $P{:}ax+by+cz=d$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$.
2. La gráfica de la ecuación
$$\mathscr{L}{:}\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$
representa una recta en $\mathbb{R}^3$.
3. Una recta $\mathscr{L}$ también se representa como
$$\mathscr{L}=\{(x,y,z)/(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(v_1,v_2,v_3),\ t\in\mathbb{R}\}$$

***Análisis y procedimiento***

Tenemos la figura que da la idea de tres planos que se intersecan según la recta $\mathscr{L}$.




Luego $\mathscr{L}$ representa el conjunto solución de un sistema lineal de 3 variables.

En ese sentido, vamos a resolver cada uno de los sistemas dados.

I. Se tiene

$P:\ 2x+3y-z=1$
$Q:\ -x+5y+2z=4$
$R:\ x+8y+z=5$

Al sumar

$$\begin{array}{r}2x+3y-z=1\ +\\ \underline{-x+5y+2z=4}\\ x+8y+z=5\end{array}$$

se obtiene $x+8y+z=5$

Luego $P+Q$ es equivalente a $R$.

El sistema tiene infinitas soluciones, entonces basta resolver

$P: \quad 2x+3y-z=1$
$Q: \quad -x+5y+2z=4$

De $P+2Q$, es decir,

$$\begin{array}{r} 2x+\ 3y-\ z=1 \\ \underline{-2x+10y+4z=8} \\ 13y+3z=9 \end{array}$$

$$y=\frac{9-3z}{13}$$

Reemplazamos en la ecuación

$$2x+3y-z=1$$

$$2x+3\left(\frac{9-3z}{13}\right)-z=1$$

Se obtiene

$$x=-\frac{7}{26}-\frac{11}{13}z$$

Luego

$$\text{CS}=\left\{(x,y,z)\big/\, x=-\frac{7}{26}-\frac{11}{13}z;\ y=\frac{9-3z}{13};\ z\in\mathbb{R}\right\}$$

como

$$(x,\ y,\ z)=\left(-\frac{7}{26}-\frac{11}{13}z;\ \frac{9-3z}{13};\ z\right)$$

$$(x,y,z)=\left(-\frac{7}{26};\frac{9}{13};0\right)+\left(-\frac{11z}{3};-\frac{3z}{13};z\right)$$

Luego

$$(x,y,z)=\left(-\frac{7}{26};\frac{9}{13};0\right)+t\left(-\frac{11}{3};-\frac{3}{13};1\right)\forall t\in\mathbb{R}$$

Lo anterior representa los puntos que pertenecen a una recta en $\mathbb{R}^3$.

Luego el conjunto solución del sistema I está dado por una recta y sería la intersección de los 3 planos.

II. Se tiene

$P: x-y+3z=-2$
$Q: -2x+2y-6z=-4$
$R: -x+y+2z=2$

En $Q$ multiplicamos por $\left(-\frac{1}{2}\right)$, es decir,

$$-\frac{1}{2}\{-2x+2y-6z=-4\}$$

se obtiene

$x-y+3z=2$

Entonces los planos $P$ y $Q$ son paralelos.
Luego el conjunto solución del sistema II es vacío.

III. Se tiene

$P: 2x-y+z=3$
$Q: -x+3y-z=1$
$R: x-2y+2z=2$

Al sumar

$$\begin{array}{r} -x+3y-z=1\ + \\ \underline{x-2y+2z=2} \end{array}$$

se obtiene $y+z=3$

De

$$\begin{array}{r} 2x-y+z=3\ + \\ \underline{2\{-x+3y-z=1\}} \end{array}$$

se obtiene $5y-z=5$

Ahora al resolver

$$\begin{cases} y+z=3 \\ 5y-z=5 \end{cases}$$

Se obtiene

$$y=\frac{4}{3};\ z=\frac{5}{3}$$

Al reemplazar en $P$ se obtiene $x=\frac{4}{3}$.

$$\rightarrow\ \text{CS}=\left\{\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)\right\}$$

Luego el sistema III tiene única solución.

***Respuesta***

solo I

## Pregunta N.° 3

Sea la sucesión $(a_k)$, donde

$$a_k = k \cdot \mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Entonces podemos afirmar que:

A) $(a_k)$ converge a 1

B) $(a_k)$ converge a $\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

C) $(a_k)$ converge a Ln 2

D) $(a_k)$ converge a 0

E) $(a_k)$ no converge

### Resolución

***Tema***: Sucesiones

Tenga en cuenta que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_b f_{(n)} = \log_b\left(\lim_{n\to+\infty} f_{(n)}\right)$$

***Análisis y procedimiento***

Tenemos

$$a_k = k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$a_k = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

Aplicando límite

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$= \ln\left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]$$

$$= \ln e$$

***Respuesta***

$(a_k)$ converge a 1

## Pregunta N.° 4

Sabiendo que se cumple

$abc=0$

$a+b+c=1$

Halle el valor de

$$K = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

A) 0 B) 1/6 C) 1/3

D) 1/2 E) 1

### Resolución

***Tema***: Productos notables

Recuerde que

$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$

$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$

***Análisis y procedimiento***

Como $abc=0 \;\rightarrow\; a=0 \vee b=0 \vee c=0$

Si $a=0 \rightarrow b+c=1$

- $(b+c)^2=(1)^2$

  $\rightarrow b^2+c^2+2bc=1$

  $\rightarrow b^2+c^2=1-2bc$

- $(b+c)^3=(1)^3$

  $\rightarrow b^3+c^3+3bc\underbrace{(b+c)}_{1}=1$

  $\rightarrow b^3+c^3=1-3bc$

Luego

$$K = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$K = \frac{0+1-2bc}{2} - \frac{0+1-3bc}{3}$$

$$K = \frac{1}{6}$$

Solucionario de Matemática

Análogamente

Si $b=0$

$$\rightarrow \quad K=\frac{1}{6}$$

Si $c=0$

$$\rightarrow \quad K=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad K=\frac{1}{6}$$

***Respuesta***

$\frac{1}{6}$

## Pregunta N.° 5

Un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas se puede expresar como $Ax=b$, donde $A$ es una matriz cuadrada de orden $n\times n$, $b$ es una matriz de orden $n\times 1$ y las incógnitas son los elementos de la matriz $x$ de orden $n\times 1$. Si $S$ es el conjunto solución del sistema $Ax=b$, entonces podemos afirmar que:

A) $S=\phi$ o $S$ es infinito.

B) Los elementos de $S$ pueden ser hallados por la regla de Cramer.

C) Si los elementos de $b$ son mayores que 0, entonces $S=\phi$ o $S$ es un conjunto unitario.

D) Si $A$ es inversible, entonces $S$ es finito.

E) Si los elementos de $b$ son todos iguales a cero, entonces no podemos utilizar la regla de Cramer para hallar los elementos de $S$.



### Resolución

***Tema***: Sistema de ecuaciones lineales en 3 variables

Recuerde que si $S$ es el conjunto solución de la ecuación $AX=b$, donde

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Luego

Si $|A|\neq 0$, entonces $S$ es finito.

Si $|A|\neq 0$, entonces $S=\phi$ o $S$ es infinito.

***Análisis y procedimiento***

Si tenemos el sistema lineal de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

este sistema es equivalente a la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

Luego, si $A$ es inversible

$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot b$

$X=A^{-1}\cdot b$

Entonces, el sistema tiene una única solución.

Por lo tanto, $S$ es finito.

***Respuesta***

Si $A$ es inversible, entonces $S$ es finito.

### Pregunta N.º 6

Sean $A$, $B$ conjuntos del mismo universo $U$. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$

II. $\text{Card}(P(A\cup B))=\text{Card}(P(A))+\text{Card}(P(B))-\text{Card}(P(A\cap B))$
donde $P(A)$ es el conjunto potencia de $A$.

III. Si $\text{Card}(A\cap B)=0$, entonces $A=\phi$ o $B=\phi$

A) VVV B) VVF C) VFF D) FFV E) FFF

### Resolución

***Tema***: Teoría de conjuntos

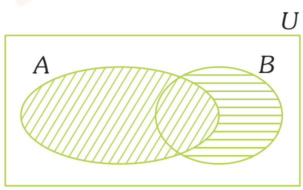
Recuerde que

- **Cardinal de un conjunto:** nos indica la cantidad de elementos diferentes que tiene un conjunto. El cardinal del conjunto $A$ se denota $n(A)$ o $\text{Card}(A)$ o $\#(A)$
- **Conjunto potencia de *A***: se denota $P(A)$
- **Cardinal del conjunto potencia de *A*:** se denota $n[P(A)]$ o $\text{Card}(P(A))$ o $\#(P(A))$ y se calcula: $\text{Card}[P(A)]=2^{\text{Card}(A)}$

***Análisis y procedimiento***

I. **Verdadera**

Graficando, tenemos




Se observa que

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ \text{Card}(A\cup B) &= \text{Card}(A)+\text{Card}(B-A)\\ \bullet\ \text{Card}(B-A) &= \text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)\end{aligned}\right\}\ \text{sumando estas dos expresiones}$$

$$\rightarrow\ \text{Card}(A\cup B)+\text{Card}(B-A)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B-A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$$

$$\therefore\ \text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$$

II. **Falsa**

Para ello planteamos un contraejemplo. Suponemos que $A=\{2; 4; 6\}$ y $B=\{4; 7\}$, entonces

$A \cup B = \{2; 4; 6; 7\}$ y $B = \{4\}$

Luego

- $P(A) = \{\phi; \{2\}; \{4\}; \{6\}; \{2; 4\}; \{2; 6\}; \{4; 6\}; \{2; 4; 6\}\} \rightarrow \text{Card}(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^3 = 8$
- $P(B) = \{\phi; \{4\}; \{7\}; \{4; 7\}\} \rightarrow \text{Card}(P(B)) = 2^{n(B)} = 2^2 = 4$
- $P(A \cup B) = \{\phi; \{2\}; \{4\}; \{6\}; \{7\}; \{2; 4\}; ...; \{2; 4; 6; 7\}\} \rightarrow \text{Card}(P(A \cup B)) = 2^{n(A \cup B)} = 2^4 = 16$
- $P(A \cap B) = \{\phi; \{4\}\} \rightarrow \text{Card}(P(A \cap B) = 2^{n(A \cap B)} = 2^1 = 2$

notamos que

$$\underbrace{\text{Card}\,(P(A \cup B))}_{2^4} \neq \underbrace{\text{Card}\,(P(A))}_{2^3} + \underbrace{\text{Card}\,(P(B))}_{2^2} - \underbrace{\text{Card}\,(P(A \cap B))}_{2^1}$$

III. **Falsa**

Si $\text{Card}(A \cap B) = 0$; ello ocurre cuando $A \cap B = \phi$. Es decir, $A$ y $B$ son conjuntos disjuntos, pero ello no implica que al menos uno de esos conjuntos sea el conjunto vacío. Por ejemplo $A = \{2; 4\}$ y $B = \{5\}$ esos conjuntos son disjuntos, entonces $A \cap B = \phi$.

$\therefore\ \text{Card}(A \cap B) = 0$

***Respuesta***

VFF

## Pregunta N.° 7

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $x^8 - 257x^4 + 256 = 0$.

A) $\{\pm 2, \pm 2i, \pm 4i, \pm 4\}$
B) $\{\pm 4, \pm 4i, \pm 1, \pm i\}$
C) $\{\pm 4, \pm 2i, \pm 2, \pm i\}$
D) $\{\pm 1, \pm i, \pm 3, \pm 3i\}$
E) $\{\pm 3, \pm 3i, \pm 4, \pm 4i\}$

### Resolución

***Tema***: Ecuaciones polinomiales

***Análisis y procedimiento***

En la ecuación polinomial

$x^8 - 257x^4 + 256 = 0$

factorizamos el polinomio sobre $\mathbb{C}$

$(x^4 - 1)(x^4 - 256) = 0$

$(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 16)(x^2 - 16) = 0$

$\rightarrow (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1)(x + 4i)(x - 4i)(x + 4)(x - 4) = 0$

Igualamos a cero cada factor y obtenemos las soluciones

$-i;\ i;\ -1;\ 1;\ -4i;\ 4i;\ -4;\ 4$

Luego

$CS=\{-4;\ 4;\ -4i;\ 4i;\ 1;\ -1;\ i;\ -i\}$

***Respuesta***

$\{\pm 4;\ \pm 4i;\ \pm 1;\ \pm i\}$

## Pregunta N.° 8

Sea $f$: $\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ una función, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, tal que

I. $f(r+s)=f(r)+f(s)$
II. $f(rs)=f(r)\cdot f(s)$
III. $f(1)=1$

Señale, la alternativa que permite la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $f(n)=n,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
II. $f(r)=r,\ \forall\ r\in\mathbb{Q}$
III. $f(n^m)=m^n,\ \forall m,\ n\in\mathbb{N}$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

### Resolución

***Tema***: Funciones

***Análisis y procedimiento***

I. **Verdadero**

Consideremos el primer dato $f(r+s)=f(r)+f(s)$

$f(2r)=f(r+r)=f(r)+f(r)=2f(r);\quad \forall\ r\in\mathbb{Q}$

$f(3r)=f(r+2r)=f(r)+f(2r)=3f(r);\forall\ r\in\mathbb{Q}$

Análogamente

$f(nr)=f(r+(n-1)r)=f(r)+f((n-1)r)=f(r)+(n-1)$

$f(r)=nf(r);\quad \forall\ r\in\mathbb{Q}$

$f(nr)=nf(r)$

Considerando $r=1$

$f(n)=n$

Por dato $f(1)=1$

$\therefore\ f(n)=n;\forall\ n\in\mathbb{N}$

II. **Verdadero**

Consideremos $f(0)+f(0)=f(0+0)=f(0)$

$2f(0)=f(0)\ \to\ f(0)=0$

además $0=f(0)=f(r-r)=f(r)+f(-r)$

$\to\ f(-r)=-f(r);\quad \forall\ r\in\mathbb{Q}^+\qquad$ (I)

Sean $m;\ n\in\mathbb{N}$ y considerando el segundo dato $f(rs)=f(r)\cdot f(s)$

$$m=f(m)=f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right)=f(n)\cdot f\left(\frac{m}{n}\right)=nf\left(\frac{m}{n}\right)$$

Teniendo en cuenta que $f(n)=n;\quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

$$m=nf\left(\frac{m}{n}\right)\leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$$

Sea $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+\to f(r)=r;\ \ \forall\ r\in\mathbb{Q}^+$

Aplicando (I) $f(-r)=-f(r)=-r$

$f(x)=x;\ \ \forall\ r\in\mathbb{Q}^-$

$\therefore\ f(r)=r;\ \ \forall\ r\in\mathbb{Q}$

III. **Falso**

Consideremos

$f(rs)=f(r)\cdot f(s)$

$f(n^2)=f(n)+(n)=f(n^2)=n^2;\qquad \forall\ n\in\mathbb{N}$

$f(n^3)=f(n)f(n^2)=f(n)f^2(n)$

$=f^3(n)=n^3;\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$

En general

$f(n^m)=f^m(n)=n^m\neq m^n$

***Respuesta***

VVF

## Pregunta N.° 9

La función $f(x)=ax^2+bx+c$ es inyectiva en $[2; +\infty\rangle$ y $g(x)=ax^2+bx+d$ es inyectiva en $\langle -\infty; 2]$. Halle el valor de $4a+b$, sabiendo que $a\neq 0$.

A) $-2$   B) $-1$   C) $0$

D) $1$   E) $2$

### Resolución

***Tema***: Funciones

Recuerde que una función cuadrática

$f(x)=ax^2+bx+c$; $a\neq 0$ es inyectiva

$\forall\ x\geq h$ o $\forall\ x\leq h$ donde $h$ es la abscisa del vértice de la gráfica $f$ (parábola).

***Análisis y procedimiento***

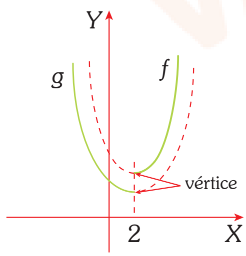
Tenemos las funciones inyectivas

$f(x)=ax^2+bx+c$; $\forall\ x\in[2; +\infty\rangle$

$g(x)=ax^2+bx+d$; $\forall\ x\in\langle -\infty; 2]$

con $a\neq 0 \wedge d$ y $c$ no necesariamente diferentes.

Consideremos $a>0 \wedge d<c$, entonces las gráficas de $f$ y $g$ son




En ambas gráficas, el vértice tiene abscisa $h=2$.

Como $h=\dfrac{x_1+x_2}{2} \rightarrow 2=-\dfrac{b}{2a} \rightarrow 4a=-b$

$\therefore\ 4a+b=0$

***Respuesta***

0

## Pregunta N.° 10

El valor numérico de

$P(x)=x^5+(3-3\sqrt{3})x^4-9\sqrt{3}x^3+5x+7\sqrt{3}$

para $x=3\sqrt{3}$ es:

A) $20\sqrt{3}$   B) $22\sqrt{3}$   C) $24\sqrt{3}$

D) $26\sqrt{3}$   E) $28\sqrt{3}$

### Resolución

***Tema***: Polinomios

Recuerde que en la aplicación del teorema del resto el valor numérico de un polinomio está asociado al residuo de una división algebraica.

$$\frac{P_{(x)}}{x-a} \xrightarrow{\text{resto}} R=P_{(a)}$$

***Análisis y procedimiento***

Calculamos convenientemente el valor numérico de

$P_{(x)}=x^5+(3-3\sqrt{3})x^4-9\sqrt{3}x^3+5x+7\sqrt{3}$

en $x=3\sqrt{3}$

Así

$$\frac{P_{(x)}}{x-3\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{resto}} R=P_{(3\sqrt{3})}$$

Luego, aplicamos la regla de Ruffini.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $3-3\sqrt{3}$ | $-9\sqrt{3}$ | 0 | 5 | $7\sqrt{3}$ |
| $3\sqrt{3}$ | | $3\sqrt{3}$ | $9\sqrt{3}$ | 0 | 0 | $15\sqrt{3}$ |
| | 1 | 3 | 0 | 0 | 5 | $22\sqrt{3}$ |

Como el residuo es $R=22\sqrt{3}$

entonces $P_{(3\sqrt{3})}=22\sqrt{3}$.

***Respuesta***

$22\sqrt{3}$

## Pregunta N.º 11

Dada la ecuación

$(\log_2 2x)^2+(\log_2 0,5x)^2+(\log_2 0,25x)^2=5$

El menor valor de sus raíces es:

A) 1 B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 3

### Resolución

***Tema***: Ecuación logarítmica

Recuerde que

$\log_b N=x \leftrightarrow b^x=N$

$\log_b(AB)=\log_b A+\log_b B$

$\log_b\left(\dfrac{A}{B}\right)=\log_b A-\log_b B$

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

***Análisis y procedimiento***

Tenemos la ecuación

$$(\log_2 2x)^2+\left(\log_2\frac{x}{2}\right)^2+\left(\log_2\frac{x}{4}\right)^2=5$$

$$(\log_2 2+\log_2 x)^2+(\log_2 x-\log_2 2)^2+$$

$$+(\log_2 x-\log_2 4)^2=5$$

$$\underbrace{(1+\log_2 x)^2+(\log_2 x-1)^2}+(\log_2 x-2)^2=5$$

$$2\left(1+\log_2^2 x\right)+\log_2^2 x-4\log_2 x+4=5$$

$$3\log_2^2 x-4\log_2 x+1=0$$

Factorizamos

$(3\log_2 x-1)(\log_2 x-1)=0$

$\rightarrow \log_2 x=\dfrac{1}{3} \vee \log_2 x=1$

$\rightarrow x=\sqrt[3]{2} \vee x=2$

Por lo tanto, el menor valor de $x$ es $\sqrt[3]{2}$.

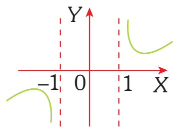
***Respuesta***

$\sqrt[3]{2}$

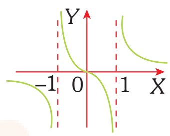
## Pregunta N.º 12

Señale la gráfica que mejor representa a la función $f(x)=y$ en su dominio.

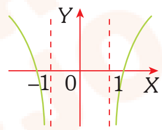
A)



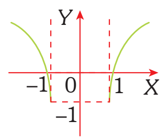

B)



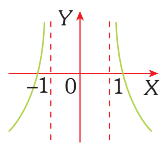

C)




D)




E)




### Resolución

***Tema***: Funciones

Una función real de variable real se define como

$f=\{(x;\, y)\in \mathbb{R}^2/y=f_{(x)} \wedge x\in \mathrm{Dom}f\}$

Una función suryectiva se define como

$f_{(x)}=y;\ \forall x\in \mathrm{Dom}f$

*Análisis y procedimiento*

Por condición del problema, $f_{(x)}=y$; entonces

$$f=\{(x;\, y)\in \mathbb{R}^2/f_{(x)}=y\wedge x\in \operatorname{Dom}f\}$$

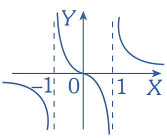
Luego, $x\in \operatorname{Dom}f\wedge f_{(x)}=y\in \mathbb{R}$, es decir, $f_{(x)}\in \mathbb{R}$. Las claves A y D no se consideran por no tener imagen los reales; entonces se asume que podrían ser las claves B, C y E, ya que tienen por imagen los reales.

Si consideramos

- $\operatorname{Dom}f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, la clave es la alternativa B.
- $\operatorname{Dom}f=\mathbb{R}-[-1;\, 1]$, se necesitaría la regla de correspondencia.

Por lo tanto, consideramos la alternativa B.

*Respuesta*




## Pregunta N.° 13

Consideremos la expresión

$E=0,3\overset{\frown}{\boldsymbol{a}}+0,33\overset{\frown}{\boldsymbol{a}}+0,333\overset{\frown}{\boldsymbol{a}}$

Determine el valor de ***a*** de manera que $E$ está lo más próximo posible a 1,0740.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 6
E) 9

### Resolución

*Tema*: Números decimales

*Análisis y procedimiento*

Para que $E$ esté lo más próximo a 1,0740 se debe cumplir que

$$E\leq 1{,}0740$$

$$0,3\overset{\frown}{a}+0,33\overset{\frown}{a}+0,333\overset{\frown}{a}\leq 1{,}0740$$

$$\frac{\overline{3a}-3}{90}+\frac{\overline{33a}-33}{900}+\frac{\overline{333a}-333}{9000}\leq 1{,}0740$$

$$\frac{100\left(\overline{3a}-3\right)+10\left(\overline{33a}-33\right)+\left(\overline{333a}-333\right)}{9000}\leq 1{,}0740$$

$$100(27+a)+10(297+a)+2997+a\leq 9666$$

$$111a+8667\leq 9666$$

$$a\leq 9$$

Por lo tanto, para que $E$ esté lo más próximo a 1,0740, el valor de ***a*** debe ser 9.

*Respuesta*

9

## Pregunta N.° 14

Las raíces cúbicas inexactas de dos enteros positivos son dos números consecutivos y sus residuos, en cada caso, son los máximos posibles. Halle la suma de estos números si la diferencia de sus residuos es 54.

A) 1416
B) 1524
C) 1727
D) 1836
E) 1976

### Resolución

*Tema*: Radicación

Recuerde que

$$\text{Por defecto}\quad \begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & k \\ \cline{2-2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{residuo}\\ \text{por defecto}}}{r_d} & \end{array} \qquad\qquad \text{Por exceso}\quad \begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & k+1 \\ \cline{2-2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{residuo}\\ \text{por exceso}}}{r_e} & \end{array}$$

Por propiedad:

$$r_d+r_e=3k(k+1)+1$$

De donde el residuo máximo al extraer la raíz cúbica a $N$ es $3\underset{\substack{\uparrow\\ \text{raíz cúbica}\\ \text{por defecto}}}{k}(k+1)$.

***Análisis y procedimiento***

Sean $A$ y $B$ los números enteros positivos a los cuales se les extrae la raíz cúbica.

- $$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{A} & n \\ \cline{2-2} \underbrace{3n(n+1)}_{\text{residuo máximo}} & \end{array}$$

  $\rightarrow\ A=n^3+3n(n+1) \qquad \text{(I)}$

- $$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{B} & n+1 \\ \cline{2-2} \underbrace{3(n+1)(n+2)}_{\text{residuo máximo}} & \end{array}$$

  $\rightarrow\ B=(n+1)^3+3(n+1)(n+2) \qquad \text{(II)}$

Por dato

$$3(n+1)(n+2)-3n(n+1)=54$$
$$(n+1)(n+2)-n(n+1)=18$$
$$(n+1)(\cancel{n}+2-\cancel{n})=18$$
$$(n+1)2=18$$
$$n=8$$

Entonces, reemplazamos en (I) y (II)

$$A=8^3+3\times8\times9=728$$
$$B=9^3+3\times9\times10=999$$

$$\therefore\ A+B=728+999=1727$$

***Respuesta***

1727

## Pregunta N.° 15

Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \langle 0; \infty\rangle$ cualesquiera, $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ arbitrario y $M_A(n)$, $M_G(n)$ y $M_H(n)$ su media aritmética, media geométrica y media armónica respectivamente.

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), en el orden dado:

I. $M_G(n)=\sqrt[n]{M_A(n)M_H(n)},\ \forall n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$

II. $M_A(n)M_H(n)=a_1a_2...a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$

III. $M_A(2)-M_G(2)=\dfrac{(a_1+a_2)^2}{4(M_A(2)+M_G(2))}$

A) VVV
B) VFF
C) FVF
D) FFV
E) FFF

## Resolución

***Tema***: Promedios

***Análisis y procedimiento***

Sabemos que $a_1; a_2; a_3; ...; a_n\in\langle 0;\infty\rangle; n\in\mathbb{N}-\{1\}$, además

- $$\underbrace{\overline{MA}(a_1;a_2;a_3;...;a_n)}_{M_A(n)}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$

- $\underbrace{\overline{MG}(a_1;\,a_2;\,a_3;\,\ldots;\,a_n)}_{M_G(n)}=\sqrt[n]{a_1\cdot\ a_2\cdot\ a_3\cdot\ \ldots\cdot\ a_n}$
- $\underbrace{\overline{MH}(a_1;\,a_2;\,a_3;\,\ldots;\,a_n)}_{M_H(n)}=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}$

Luego, analizamos cada una de las proposiciones.

I. **Falsa**

Solo se cumple si $n=2$.

$$\left(\overline{MG}(a_1;\,a_2)=\sqrt{\overline{MA}(a_1;\,a_2)\cdot\ \overline{MH}(a_1;\,a_2)}\right)$$

Pero para $n\geq 3$ no siempre se cumple, por ejemplo

$$\overline{MA}(1;\,2;\,4)=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\overline{MG}(1;\,2;\,4)=\sqrt[3]{1\cdot\ 2\cdot\ 4}=2$$

$$\overline{MH}(1;\,2;\,4)=\frac{3}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}=\frac{12}{7}$$

Notamos que

$$\underbrace{\overline{MG}(1;\,2;\,4)}_{2}\neq\underbrace{\sqrt[3]{\overline{MA}(1;\,2;\,4)\times\overline{MH}(1;\,2;\,4)}}_{\underbrace{\sqrt[3]{\frac{7}{3}\times\frac{12}{7}}}_{\sqrt[3]{4}}}$$

II. **Falsa**

Solo se cumple si $n=2$

$$\overline{MA}(a_1;\,a_2)\times\overline{MH}(a_1;\,a_2)=a_1\times a_2$$

Pero para $n\geq 3$ no siempre se cumple, por ejemplo

$$\overline{MA}(1;\,2;\,4)=\frac{7}{3}$$

$$\overline{MG}(1;\,2;\,4)=2$$

$$\overline{MH}(1;\,2;\,4)=\frac{12}{7}$$

Notamos que

$$\underbrace{\underbrace{\overline{MA}(1;\,2;\,4)}_{\frac{7}{3}}\times\underbrace{\overline{MH}(1;\,2;\,4)}_{\frac{12}{7}}}_{4}\neq\underbrace{1\times 2\times 4}_{8}$$

III. **Falsa**

Porque

$$\overline{MA}(a_1;\,a_2)=\frac{a_1+a_2}{2}$$

$$\rightarrow\ \overline{MA}^2(a_1;\,a_2)=\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\qquad(\alpha)$$

$$\overline{MG}(a_1;\,a_2)=\sqrt{a_1\times a_2}$$

$$\rightarrow\ \overline{MG}^2(a_1;\,a_2)=\left(\sqrt{a_1\times a_2}\right)^2\qquad(\beta)$$

Restamos las expresiones que se observan en $\alpha$ y $\beta$, en ese orden.

$$\overline{MA}^2(a_1;\,a_2)=\frac{a_1^2+a_2^2+2a_1\times a_2}{4}\qquad(-)$$

$$\overline{MG}^2(a_1;\,a_2)=a_1\times a_2$$

$$\overline{MA}^2-\overline{MG}^2=\frac{a_1^2-2a_1\times a_2+a_2^2}{4}$$

$$\overline{MA}^2-\overline{MG}^2=\frac{(a_1-a_2)^2}{4}$$

$$\left(\overline{MA}^2+\overline{MG}^2\right)\left(\overline{MA}^2-\overline{MG}^2\right)=(a_1-a_2)^2$$

$$\overline{MA}^2-\overline{MG}^2=\frac{(a_1-a_2)^2}{4\left(\overline{MA}^2-\overline{MG}^2\right)}$$

***Respuesta***

FFF

## Pregunta N.° 16

Un juego de azar (tipo lotería) consiste en elegir 5 números diferentes de los primeros 30 números naturales. Cada persona que participa en este juego compra 26 jugadas diferentes. Calcule la cantidad mínima de jugadores que se necesita para ganar el juego.

A) 2349
B) 3915
C) 5481
D) 6264
E) 7047

### Resolución

***Tema***: Análisis combinatorio

***Análisis y procedimiento***

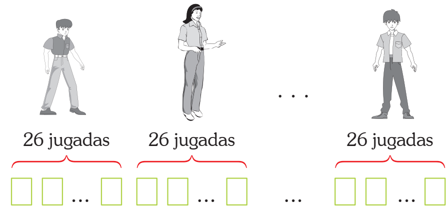
Como el juego consiste en elegir 5 números diferentes de los primeros 30 números naturales, tendremos


La cantidad total de formas de elegir 5 números diferentes de un total de 30 estará dado por

$$C_5^{30}=\frac{30!}{5!\times 25!}=142\,506$$

En total hay 142 506 formas de jugadas diferentes y cada persona que participa compra 26 jugadas.

Entonces, se realiza un esquema




Para hallar la mínima cantidad de jugadores, estas deben comprar diferentes jugadas.

$$\text{N.° jugadores}=\frac{142\,506}{26}=5481$$

***Respuesta***

5481

## Pregunta N.° 17

Si los coeficientes del primer y último término del desarrollo del binomio $\left(3a^2x^3+ay^4\right)^{20}$ son iguales ($a>0$), determine el coeficiente del décimo octavo término.

A) $\dfrac{190}{3^{21}}$ B) $\dfrac{380}{3^{21}}$ C) $\dfrac{190}{3^{20}}$

D) $\dfrac{380}{3^{20}}$ E) $\dfrac{380}{3^{19}}$

### Resolución

***Tema***: Binomio de Newton

En el desarrollo de $(a+b)^n$, el término ubicado en el lugar $(k+1)$ es

$$t_{k+1}=C_k^n a^{n-k}\cdot b^k;\ k=0;1;2;\ldots;n$$

donde

$$C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

además

$$C_0^n=C_n^n=1$$

*Análisis y procedimiento*

Determinemos el primer y el último término del desarrollo del binomio $(3a^2x^3+ay^4)^{20}$.

$$t_1=C_0^{20}(3a^2x^3)^{20}(ay^4)^0=3^{20}a^{40}x^{60}$$

$$t_{21}=C_{20}^{20}(3a^2x^3)^0(ay^4)^{20}=a^{20}x^{80}$$

Como los coeficientes son iguales

$\rightarrow$ $3^{20}a^{40}=a^{20}$

$a=1/3$

Reemplazamos en el binomio

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^4}{3}\right)^{20}$$

Luego, el décimo octavo término es

$$t_{18}=C_{17}^{20}\left(\frac{x^3}{3}\right)^3\left(\frac{y^4}{3}\right)^{17}$$

$$t_{18}=\frac{20!}{3!17!}\cdot\frac{x^9}{3^3}\cdot\frac{y^{68}}{3^{17}}$$

$$t_{18}=\frac{380}{3^{19}}\cdot x^9\cdot y^{68}$$

Por lo tanto, su coeficiente es $\frac{380}{3^{19}}$.

*Respuesta*

$\frac{380}{3^{19}}$

## Pregunta N.° 18

Determine la cantidad de números de cuatro cifras en base 8, que contienen al número tres.

A) 1520
B) 1522
C) 1524
D) 1526
E) 1528

**Resolución**

*Tema*: Teoría de numeración

*Análisis y procedimiento*

Para obtener el resultado del problema se considerará lo siguiente

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{números de 4}\\ \text{cifras que tienen}\\ \text{la cifra 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{números de 4}\\ \text{cifras sin}\\ \text{restricción}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{números de 4}\\ \text{cifras que no}\\ \text{tienen la cifra 3}\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\overline{abcd}_8}\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ &0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 2&2&2&2\\ 3&3&3&3\\ 4&4&4&4\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 7&7&7&7\\ \hline \multicolumn{4}{c}{7\times8\times8\times8}\end{array}}_{3584}\qquad\underbrace{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\overline{abcd}_8}\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ &0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 2&2&2&2\\ 3&3&3&3\\ 4&4&4&4\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 7&7&7&7\\ \hline \multicolumn{4}{c}{6\times7\times7\times7}\end{array}}_{2058}$$

La cifra 3 no se considerará en el conteo.

$$\therefore\begin{pmatrix}\text{Cantidad de números}\\ \text{de 4 cifras que tienen}\\ \text{la cifra 3}\end{pmatrix}=3584-2058=1526$$

*Respuesta*

1526

## Pregunta N.° 19

Al multiplicar un número $A$ de cuatro cifras por 999 se obtiene un número que termina en 5352. Calcule la suma de las cifras del número $A$.

A) 18
B) 19
C) 20
D) 21
E) 22

### RESOLUCIÓN

***Tema***: Cuatro operaciones

***Análisis y procedimiento***

Sea $A=\overline{abcd}$ del cual debemos hallar $a+b+c+d$.

Del dato tenemos

$$\overline{abcd}\times 999=...5352$$

$$\overline{abcd}\times(1000-1)=...5352$$

$$\overline{abcd000}-\overline{abcd}=...5352$$

Entonces

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,1\,1 \\ \overline{abcd000}- \\ \underline{\overline{abcd}} \\ ...5352 \end{array}$$

$10-d=2 \rightarrow d=8$

$9-c=5 \rightarrow c=4$

$9-b=3 \rightarrow b=6$

$7-a=5 \rightarrow a=2$

$\therefore\ a+b+c+d=20$

***Respuesta***

20

### Pregunta N.° 20

Considere el mayor de los números $N$ cuya descomposición en sus factores primos de una cifra es $2^a\cdot 5^3\cdot m^u\cdot 3^r$, sabiendo que cuando se divide por 40 se obtiene otro número de 54 divisores y además $a+u+r<9$. Calcule la suma de sus cifras.

A) 9
B) 10
C) 12
D) 15
E) 18

### RESOLUCIÓN

***Tema***: Números primos y compuestos

***Análisis y procedimiento***

Del dato tenemos que

$$N_{\text{máximo}}=\underbrace{2^a\times 5^3\times m^u\times 3^r}_{\text{primos de una cifra}}\ \text{(descomposición canónica)}$$

Como 2; 5; $m$ y 3 son primos de una cifra, se concluye que $m=7$; entonces

$$N=2^a\times 5^3\times 7^u\times 3^r$$

Luego, este número se dividirá entre 40 ($40=2^3\times 5$), del cual se obtiene

$$\frac{N}{40}=2^{a-3}\times 5^2\times 7^u\times 3^r$$

$$\text{CD}\left(\frac{N}{40}\right)=(a-2)\times 3\times(u+1)\times(r+1)=54$$

$$(a-2)(u+1)(r+1)=18$$

| $(a-2)$ | $(u+1)$ | $(r+1)$ | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | $\rightarrow a=4; u=2; r=2\ (a+u+r<9)$ |
| 3 | 2 | 3 | $\rightarrow a=5; u=1; r=2\ (a+u+r<9)$ |
| 3 | 3 | 2 | $\rightarrow a=5; u=2; r=1\ (a+u+r<9)$ |

La descomposición canónica de $N$ tiene tres posibilidades, pero como $N$ debe ser máximo, entonces se considerará que $a=4$; $u=2$ y $r=2$.

$\rightarrow\ N=2^4\times 5^3\times 7^2\times 3^2=882\,000$

Por lo tanto, la suma de cifras de $N$ es 18.

***Respuesta***

18

## PARTE 2

### Pregunta N.° 21

El área de un triángulo cuyos vértices son $A(x, y)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -1)$, es $7u^2$.

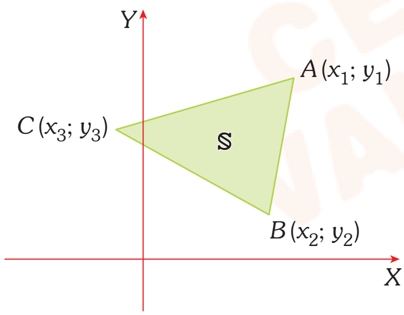
Además $y+3x=4$ y $x > -2$.

Calcule $x+y$.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

### Resolución

*Tema*: Geometría analítica

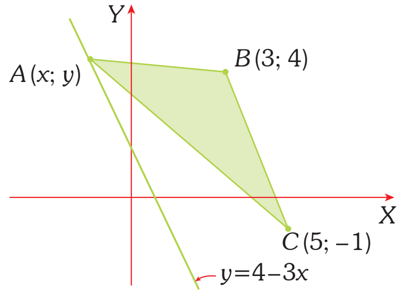



$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & y_1 & \\ y_1x_2 & x_2 & y_2 & x_1y_2 \\ y_2x_3 & x_3 & y_3 & x_2y_3 \\ y_3x_1 & x_1 & y_1 & x_3y_1 \\ \hline I & & & D \end{array}$$

$$S=\frac{|D-I|}{2}$$

*Análisis y procedimiento*

Graficamos según los datos.




Hallamos el área.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 5 & -1 & \\ -3 & 3 & 4 & 20 \\ 4x & x & y & 3y \\ 5y & 5 & -1 & -x \\ \hline \underbrace{4x+5y-3}_{I} & & & \underbrace{20+3y-x}_{D} \end{array} \quad (+)$$

$$\mathbb{A}=\frac{|D-I|}{2}$$

$$7=\frac{|20+3y-x-(4x+5y-3)|}{2}$$

$$7=\frac{|23-5x-2y|}{2} \qquad \text{(I)}$$

Como $A(x;y) \in \overline{\mathscr{L}}$, entonces

$$y=4-3x \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$x=-1$; $y=7$

$\therefore\ x+y=6$

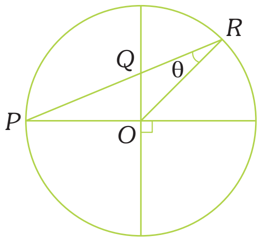
*Respuesta*

6

## Pregunta N.° 22

En la circunferencia trigonométrica adjunta, determine: $\dfrac{\text{área del } \Delta POR}{\text{área del } \Delta RQO}$.

A) $\csc(2\theta)+1$
B) $\csc(\theta)+1$
C) $\sec(\theta)+1$
D) $\sec(2\theta)+1$
E) $\sec(2\theta)+2$

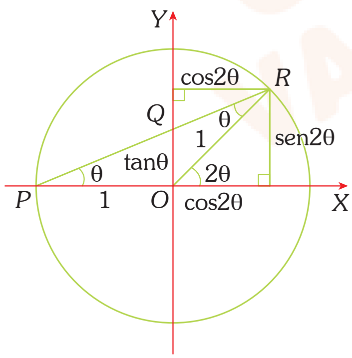



### Resolución

***Tema***: Circunferencia trigonométrica

- $\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cos\theta$
- $2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$

***Análisis y procedimiento***




$$M=\frac{\text{Área del } \Delta POR}{\text{Área del } \Delta RQO}$$

$$M=\frac{\dfrac{(1)(\text{sen}2\theta)}{2}}{\dfrac{(\tan\theta)(\cos2\theta)}{2}}=\frac{2\,\text{sen}\theta\cos\theta}{\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\cos2\theta}$$

$$M=\frac{2\cos^2\theta}{\cos2\theta}=\frac{1+\cos2\theta}{\cos2\theta}$$

$\therefore\ M=\sec(2\theta)+1$

***Respuesta***

$\sec(2\theta)+1$

## Pregunta N.° 23

Sean $f_{(x)}=\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $g_{(x)}=\text{sen}(2x)$,

para $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Entonces podemos afirmar que:

A) $f_{(x)}>g_{(x)}$
B) $f_{(x)}\geq g_{(x)}$
C) $f_{(x)}<g_{(x)}$
D) $f_{(x)}\leq g_{(x)}$
E) $f_{(x)}\leq g_{(x)}$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ y

$g_{(x)}<f_{(x)}$, $x\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$

### Resolución

***Tema***: Funciones trigonométricas directas

***Análisis y procedimiento***

Dato

$$x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$$

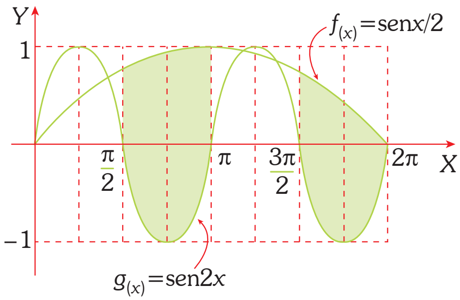
I. $f_{(x)}=\text{sen}\dfrac{x}{2}$

Periodo: $T_f=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}\ \rightarrow\ T_f=4\pi$

II. $g_{(x)}=\text{sen}2x$

Periodo: $T_g=\dfrac{2\pi}{2}\ \rightarrow\ T_g=\pi$

Graficamos las funciones $f$ y $g$.




Del gráfico, tenemos que

Si $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

$\rightarrow f_{(x)} \geq g_{(x)}$

**Respuesta**

$f_{(x)} \geq g_{(x)}$

## Pregunta N.º 24

Calcule el resultado, simplificado, de la siguiente expresión.

$E=2^5\text{sen}5^\circ\text{sen}10^\circ\text{sen}50^\circ\text{sen}70^\circ\text{sen}85^\circ\text{sen}110^\circ\text{sen}130^\circ$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 4

### Resolución

***Tema***: Identidades trigonométricas del arco múltiple

- $\text{sen}(90^\circ-\theta)=\cos\theta$
- $\text{sen}(180^\circ-\theta)=\text{sen}\theta$
- $\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cos\theta$
- $\text{sen}3\theta=4\text{sen}(60^\circ-\theta)\text{sen}\theta\,\text{sen}(60^\circ+\theta)$

***Análisis y procedimiento***

$E=2^5\text{sen}5^\circ\text{sen}10^\circ\text{sen}50^\circ\text{sen}70^\circ\text{sen}85^\circ\text{sen}110^\circ\text{sen}130^\circ$

$E=32\text{sen}5^\circ\text{sen}10^\circ\text{sen}50^\circ\text{sen}70^\circ\cos5^\circ\text{sen}70^\circ\text{sen}50^\circ$

$E=16(2\text{sen}5^\circ\cos5^\circ)\text{sen}10^\circ\text{sen}^2 50^\circ\text{sen}^2 70^\circ$

$E=16(\text{sen}10^\circ)\text{sen}10^\circ\text{sen}^2 50^\circ\text{sen}^2 70^\circ$

$E=16\text{sen}^2 10^\circ\text{sen}^2 50^\circ\text{sen}^2 70^\circ$

$E=[4\text{sen}10^\circ\text{sen}50^\circ\text{sen}70^\circ]^2$

$E=[4\text{sen}10^\circ\text{sen}(60^\circ-10^\circ)\text{sen}(60^\circ+10^\circ)]^2$

$E=[\text{sen}3(10^\circ)]^2$

$E=[\text{sen}30^\circ]^2$

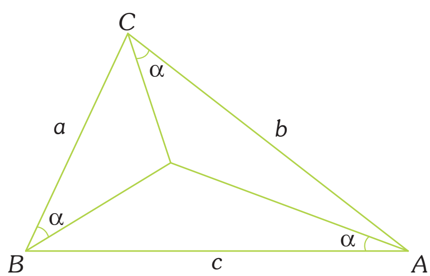
$E=1/4$

**Respuesta**

1/4

## Pregunta N.º 25

En la figura:

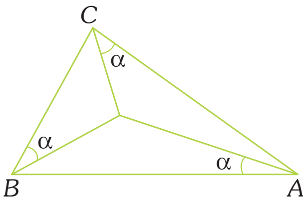



Si $a=3$, $b=25$, $c=26$, $\text{tg}\alpha=\frac{m}{n}$, donde $m$ y $n$ son primos entre si, calcule $m+n$.

A) 727 B) 728 C) 729
D) 730 E) 731

## RESOLUCIÓN

***Tema***: Resolución de triángulos oblicuángulos

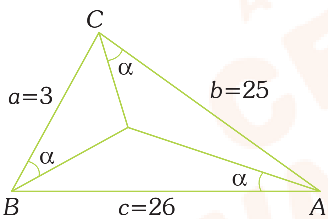



Punto de Brocard:

$$\boxed{\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C}$$

***Análisis y procedimiento***

Tenemos




Por teorema de cosenos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\rightarrow\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \text{(I)}$$

Por área de la región triangular $ABC$ ($\mathbb{S}$)

$$\mathbb{S}=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A$$

$$\rightarrow\ \operatorname{sen}A=\frac{2\mathbb{S}}{bc} \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) y (II)

$$\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\mathbb{S}}$$

Análogamente

$$\cot B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4\mathbb{S}},\ \cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\mathbb{S}}$$

Aplicamos en el gráfico el punto de Brocard

$$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$$

$$\cot\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\mathbb{S}}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4\mathbb{S}}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4\mathbb{S}}$$

$$\cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\mathbb{S}}$$

$$\cot\alpha=\frac{(3)^2+(25)^2+(26)^2}{4\mathbb{S}} \qquad \text{(III)}$$

Aplicamos la fórmula de Herón para calcular el área de la región triangular $ABC$

$$\mathbb{S}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\mathbb{S}=\sqrt{27(27-3)(27-25)(27-26)}$$

$$\mathbb{S}=36 \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (IV) en (III)

$$\cot\alpha=\frac{1310}{4(36)}$$

$$\cot\alpha=\frac{655}{72}$$

$$\tan\alpha=\frac{72}{655}$$

$$\frac{m}{n}=\frac{72}{655}$$

Como $m$ y $n$ son primos entre sí entonces $m=72$ y $n=655$.

$\therefore\ m+n=727$

***Respuesta***

727

## Pregunta N.° 26

Dada la ecuación en el plano complejo,

$$(1-i)z+\overline{(1-i)z}+2=0,$$

determine la ecuación cartesiana.

A) $2x+2y+1=0$
B) $x+y+1=0$
C) $2x-2y+1=0$
D) $-x+y+1=0$
E) $-2x+y+2=0$

### Resolución

***Tema***: Números complejos

Sea $z=x+yi$ tal que $x,\ y\in\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$.

- $z+\bar{z}=2x$
- $z-\bar{z}=2yi$
- $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$; $\forall\ z,\ w\in\mathbb{C}$
- $\bar{z}=x-yi$

***Análisis y procedimiento***

Tenemos por dato

$$(1-i)z+\underbrace{\overline{(1-i)z}}+2=0$$

$$(1-i)z+\overline{(1-i)}\cdot\bar{z}+2=0$$

$$(1-i)z+(1+i)\cdot\bar{z}+2=0$$

$$z-iz+\bar{z}+i\bar{z}+2=0$$

Agrupamos de manera conveniente.

$$\underbrace{z+\bar{z}}-i\underbrace{(z-\bar{z})}+\ 2=0$$

$$2x\ -\ i(2yi)\ +2=0$$

$$2x\ +\ 2y\ \ +2=0$$

$\therefore\ x+y+1=0$

***Respuesta***

$x+y+1=0$

## Pregunta N.° 27

Halle el dominio de la función

$$f(x)=17\,\text{arc sec}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

A) $\left\langle-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},\infty\right\rangle$

B) $\left\langle-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},\infty\right\rangle$

C) $\left\langle-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$

D) $\left\langle-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$

E) $\left\langle-\infty,-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},\infty\right\rangle$

### Resolución

***Tema***: Funciones trigonométricas inversas

$f_{(x)}=A\text{arcsec}(Bx)\ \rightarrow\ Bx\le-1\ \vee\ Bx\ge1$

***Análisis y procedimiento***

Nos piden el dominio de $f$.

$$f_{(x)}=17\,\text{arc sec}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

Por teoría, $f$ está definida en $\mathbb{R}$ si

$$x-\frac{3}{2}\le-1\ \vee\ x-\frac{3}{2}\ge1$$

$$x\le\frac{1}{2}\ \vee\ x\ge\frac{5}{2}$$

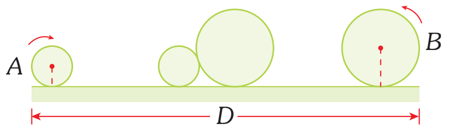
$$\therefore\ \text{Dom}\,f=\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right\rangle$$

***Respuesta***

$\left\langle-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2};\infty\right\rangle$

## Pregunta N.° 28

En la figura mostrada, las ruedas $A$ y $B$ dan $2n$ y $n$ vueltas respectivamente ($n > 2$) desde su posición inicial, hasta el instante en que llegan a tocarse; además, $r_A$=1 u y $r_B$=9 u. Calcule $D$ en u.

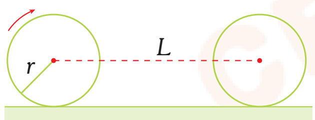



A) $10n\pi$ B) $15n\pi+1$ C) $20n\pi+2$
D) $22n\pi+4$ E) $22n\pi+6$

### Resolución

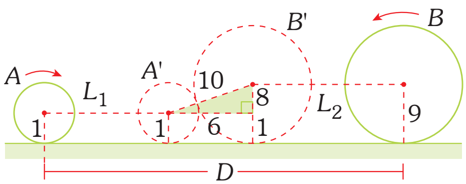
***Tema***: Aplicación de longitud de arco

Número de vueltas de una rueda ($n$)




$$n=\frac{L}{2\pi r}$$

***Análisis y procedimiento***




Hallamos el número de vueltas de $A$.

$$n_A=\frac{L_1}{2\pi r_1}$$

$$2n=\frac{L_1}{2\pi(1)}$$

$\rightarrow\ \mathscr{L}_1=4\pi n$

Hallamos el número de vueltas de $B$.

$$n_B=\frac{L_2}{2\pi r_2}$$

$$n=\frac{L_2}{2\pi(9)}$$

$\rightarrow\ L_2=18\pi n$

Nos preguntan

$D=L_1+6+L_2$

$D=4\pi n+6+18\pi n$

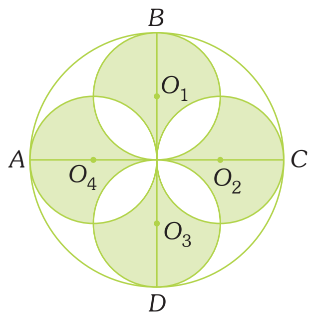
$\therefore\ D=22\pi n+6$

***Respuesta***

$22\pi n+6$

## Pregunta N.° 29

En la figura: $O$, $O_1$, $O_2$, $O_3$ y $O_4$ son centros de circunferencias, donde $A$, $B$, $C$ y $D$ son puntos de tangencia. Si $AO$=1 cm, entonces el área de la superficie sombreada es:

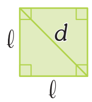



A) 1,85
B) 1,90
C) 1,95
D) 2,00
E) 2,14

### Resolución

***Tema***: Área de regiones circulares

Área de la región cuadrada

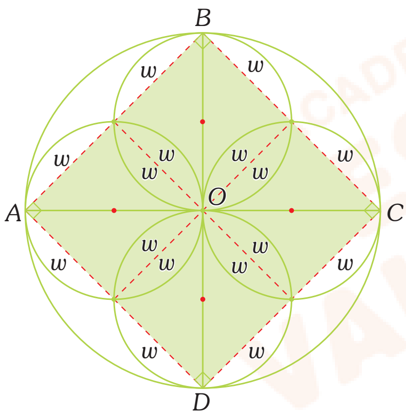



$$\mathbb{A}_{\blacksquare}=\frac{d^2}{2}$$

***Análisis y procedimiento***

Piden $\mathbb{A}_x$ ($\mathbb{A}_x$: área de la región sombreada)

Dato $AO=1$ cm




Del dato se deduce que $\mathbb{A}_x$ equivale al área de la región cuadrada $ABCD$, haciendo un traslado de áreas.

Luego

$$\mathbb{A}_x=\mathbb{A}_{\blacksquare}=\frac{(AC)^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Entonces

$$AC=2 \qquad \text{(II)}$$

$\therefore\ \mathbb{A}_x=2$

***Respuesta***

2,00

## Pregunta N.° 30

De un recipiente lleno de agua que tiene la forma de un cono circular recto de 20 cm de radio y 40 cm de altura, se vierte el agua a un recipiente cilíndrico de 40 cm de radio, entonces a qué altura, en cm, se encuentra el nivel del agua en el recipiente cilíndrico.

A) 5 B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{5}{2}$

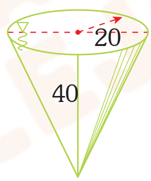
D) 2 E) $\frac{5}{3}$

### Resolución

***Tema***: Cono de revolución

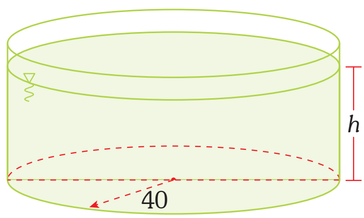
***Análisis y procedimiento***

Nos piden $h$ (altura del nivel de agua en el cilindro).




$$\mathbb{V}_{\text{cono}}=\frac{\pi 20^2(40)}{3} \qquad \text{(I)}$$

$$\underset{\text{(nivel de agua)}}{\mathbb{V}_{\text{cilindro}}}=\pi 40^2\cdot h \qquad \text{(II)}$$




Como las expresiones (I) y (II) son iguales,

$$\rightarrow\quad \pi 40\times 40h=\frac{\pi\cdot 20(20)(40)}{3}$$

$$\therefore\quad h=\frac{10}{3}$$

***Respuesta***

$\frac{10}{3}$

## Pregunta N.° 31

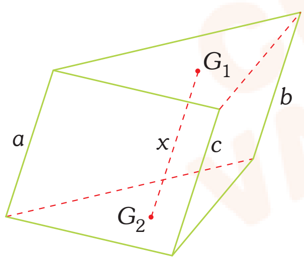
En un tronco de prisma triangular oblicuo, la longitud del segmento que une los baricentros de sus bases es 16 cm. Calcule la longitud de la menor arista (en cm), si éstas están en razón de 3, 4 y 5.

A) 4
B) 8
C) 12
D) 16
E) 48

### Resolución

***Tema***: Tronco de prisma

Recuerde que en todo tronco de prisma triangular




Si $G_1$ y $G_2$ son los baricentros de las bases.

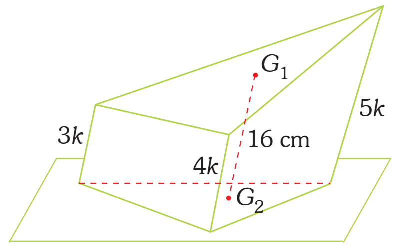
$$\boxed{x=\frac{a+b+c}{3}}$$

***Análisis y procedimiento***

Nos piden la longitud de la menor arista$=3K$.

Dato

Las aristas están en la razón de 3; 4 y 5, y el segmento que une los baricentros de las bases mide 16 cm.




Como $G_1$ y $G_2$ son los baricentros de las bases

$$16\text{ cm}=\frac{3K+4K+5K}{3}$$

$K=4$ cm

$\therefore\ 3K=12$ cm

***Respuesta***

12

## Pregunta N.° 32

En un semicírculo cuyo radio mide $R$ cm, se inscribe un triángulo rectángulo $ABC$ ($\overline{AC}$ diámetro) tal que al girar alrededor de la hipotenusa genera un sólido, cuyo volumen es la mitad de la esfera generada por dicho semicírculo. Entonces el área de la superficie esférica es al área de la región triangular $ABC$ como:

A) $\frac{8}{3}\pi$

B) $3\pi$

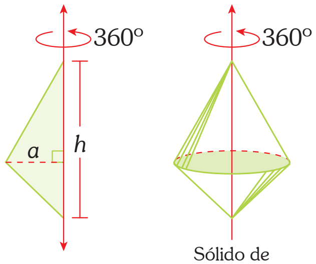
C) $4\pi$

D) $\frac{16}{3}\pi$

E) $8\pi$

**Resolución**

***Tema***: Esfera




Sólido de revolución

Se sabe que su volumen

$$\mathbb{V}_{\text{S.G.}}=\frac{\pi a^2 h}{3}$$

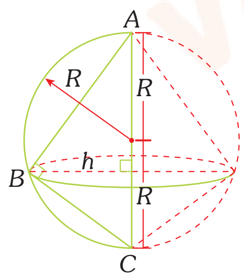
$\mathbb{V}_{\text{S.G.}}$: volumen del sólido generado

***Análisis y procedimiento***

Nos piden

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{S.E.}}}{\mathbb{A}_{\triangle ABC}}$$

$\mathbb{A}_{\text{S.E.}}$: área de la superficie esférica




Del dato

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{S.G.}\\ ABC}}=\frac{1}{2}\mathbb{V}_{\text{esfera}}$$

$$\frac{\pi h^2(2R)}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$$

$$h^2=R^2$$

$$h=R$$

Luego

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{S.E.}}}{\mathbb{A}_{\triangle ABC}}$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{S.E.}}}{\mathbb{A}_{\triangle ABC}}=\frac{4\pi R^2}{\frac{2R(h)}{2}}=\frac{4\pi R}{h}$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{S.E.}}}{\mathbb{A}_{\triangle ABC}}=4\pi$$

***Respuesta***

$4\pi$



## Pregunta N.º 33

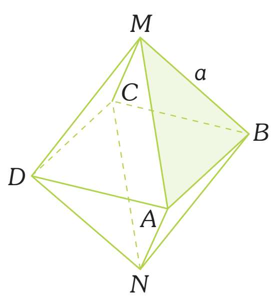
Si el perímetro del desarrollo de la superficie lateral del octaedro mide 30 u; determine la superficie lateral del poliedro mencionado.

A) $14\sqrt{3}\ \text{u}^2$ B) $16\sqrt{3}\ \text{u}^2$ C) $18\sqrt{3}\ \text{u}^2$
D) $20\sqrt{3}\ \text{u}^2$ E) $22\sqrt{3}\ \text{u}^2$

**Resolución**

***Tema***: Poliedro

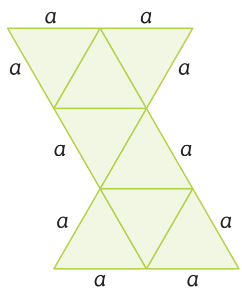
Octaedro regular




Área de la superficie: $\mathbb{A}_s$

$$\mathbb{A}_s=2a^2\sqrt{3}$$

Desarrollo de la superficie total




Perímetro de la superficie total$=10\,a$

***Análisis y procedimiento***

El dato es el perímetro de la superficie lateral del octaedro.

$$30\text{ u}=10\,a$$

$$3=a$$

Nos piden $\mathbb{A}_S$.

Se sabe que

$$\mathbb{A}_S=2a^2\sqrt{3}$$

$$\mathbb{A}_S=2(3)^2\sqrt{3}$$

$$\mathbb{A}_S=18\sqrt{3}$$

**Nota**

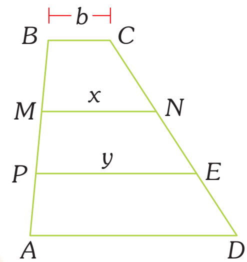
En el enunciado dice octaedro. Se asume que es un OCTAEDRO REGULAR (falta dato), entonces debemos entender que la superficie lateral es la superficie total.

***Respuesta***

$18\sqrt{3}\text{ u}^2$

## Pregunta N.° 34

Se da un trapecio en el cual la base menor mide $b$. Si la base mayor es 8 veces la base menor (figura), y se divide el trapecio en 3 trapecios semejantes por dos paralelas a las bases, halle el valor de $x$ (la menor paralela).



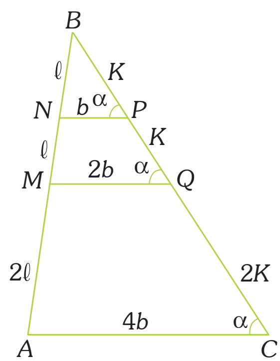

A) $2b$
B) $2{,}5b$
C) $3b$
D) $1{,}5b$
E) $3{,}5b$

### Resolución

***Tema***: Semejanza

Tenga en cuenta que si los trapecios $MNPQ$ y $AMQC$ son semejantes, entonces

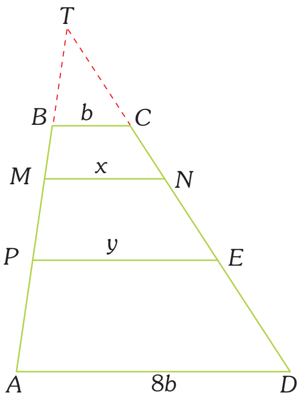
$$\frac{NP}{MQ}=\frac{PQ}{QC}=\frac{MQ}{AC}=t \quad \left(\begin{array}{l} t \text{ es constante} \\ \text{de semejanza}\end{array}\right)$$



### *Análisis y procedimiento*

Nos piden $x$.

Dato $AD=8b$




Se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se intersecan en $t$.

Del otro dato se tiene que los trapecios $MBCN$, $PMNE$ y $APED$ son semejantes.

$$\frac{b}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{8b}=t$$

Multiplicamos

$$\frac{1}{8}=t^3$$

$$\frac{1}{2}=t$$

Luego

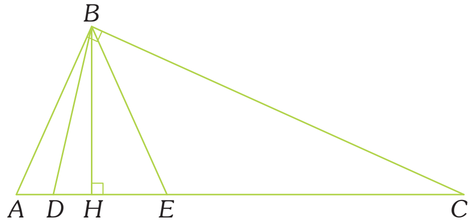
$x=2b$

### *Respuesta*

$2b$

## Pregunta N.° 35

En la figura, el triángulo $ABC$ recto en $B$, $\overline{BH}$ es la altura, $\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo $ABH$ y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo $HBC$. Si $AB=7$ u y $BC=24$ u. Calcule el valor del segmento $DE$ (en u).



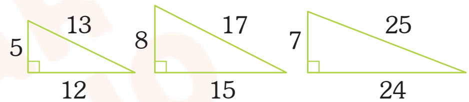

A) 4 B) 5 C) 6

D) 8 E) 9

## Resolución

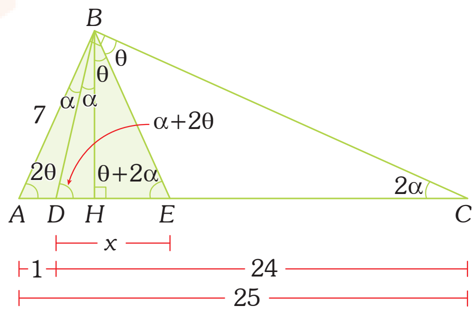
***Tema***: Líneas notables

Recuerde algunos de los triángulos pitagóricos.




### *Análisis y procedimiento*

Nos piden $DE=x$




Datos $AB=7$, $BC=24$ $\rightarrow$ $AC=25$

Como $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ son bisectrices, entonces los $\triangle ABE$ y $\triangle BCD$ son isósceles.

Luego

$x+1=7$

$\therefore$ $x=6$

### *Respuesta*

6

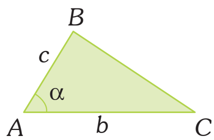
## Pregunta N.º 36

Se tiene un triángulo equilátero $ABC$ inscrito en una circunferencia de radio $r=6$ cm, si $M$ es el punto que divide al arco $\overset{\frown}{AB}$ en partes iguales ($M \neq C$), entonces el área de la región triangular $AMB$ en cm$^2$ es:

A) $8\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$
D) $11\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

### Resolución

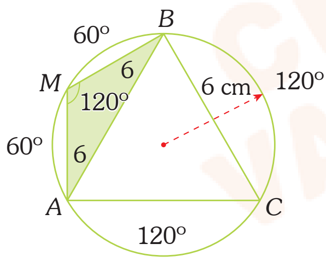
***Tema***: Áreas de regiones triangulares




Por fórmula trigonométrica

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

***Análisis y procedimiento***




Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle AMB}$

Como $\text{m}\overset{\frown}{AM} = \text{m}\overset{\frown}{BM}$ y $\text{m}\overset{\frown}{AMB} = 120°$

$\rightarrow AM=MB=6 \ \left(\text{m}\overset{\frown}{AM} = \text{m}\overset{\frown}{MB} = 60°\right)$

Por ángulo inscrito: $\text{m}\sphericalangle AMB = \dfrac{240°}{2} = 120°$

Luego, por fórmula trigonométrica

$$\mathbb{A}_{\triangle AMB} = \frac{(6)(6)}{2}\operatorname{sen}120°$$

$$\mathbb{A}_{\triangle AMB} = 9\sqrt{3}$$

***Respuesta***

$9\sqrt{3}$

## Pregunta N.º 37

En un triángulo $ABC$, $AB=4$ u, $BC=6$ u. Se traza $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$ donde los puntos $D$ y $E$ pertenecen a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de modo que el segmento $\overline{BE}$ sea bisectriz del ángulo $B$. Calcule el valor de $BD$ (en u).

A) 1,8 B) 2,0 C) 2,2
D) 2,4 E) 2,8

### Resolución

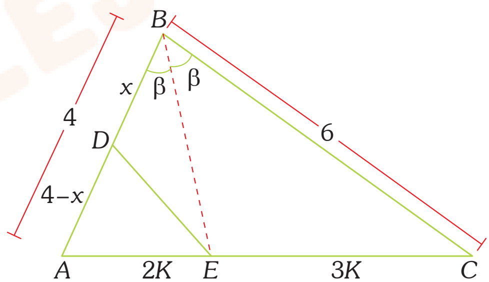
***Tema***: Proporcionalidad de segmentos

***Análisis y procedimiento***

Nos piden $BD=x$

**Datos**

$AB=4$ u, $BC=6$ u y $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo $B$.




Por el teorema de la bisectriz interior

$$\frac{4}{6} = \frac{AE}{EC}, \quad AE = 2K \ \text{ y } \ EC = 3K$$

Como $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$, por el corolario de Thales,

$$\frac{x}{4-x} = \frac{3K}{2K}$$

$$x=2,4$$

***Respuesta***

2,4

## Pregunta N.° 38

Dos segmentos paralelos en el plano tienen longitudes 3 cm y 1 cm respectivamente. Si la distancia entre esos segmentos es de 1 cm, calcule el radio de la circunferencia que pasa por los extremos de dichos segmentos.

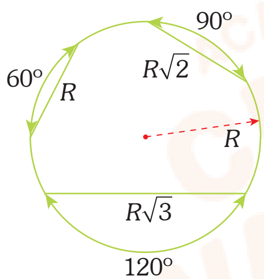
A) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{7}{2}}$

D) $\sqrt{\frac{9}{2}}$ E) 2,5

### Resolución

***Tema***: Circunferencia

Recordando arcos y cuerdas notables




***Análisis y procedimiento***

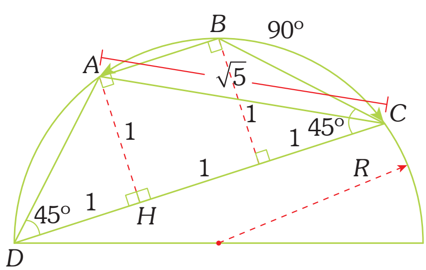
Nos piden $R$.

**Datos**

$AB$=1, $CD$=3, $AH$=1, $\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\square ABCD$ es inscrito

De lo anterior se deduce que

$\square ABCD$: trapecio isósceles




Del gráfico

$$m\widehat{ABC}=90°$$

$$\rightarrow\ AC=R\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5}=R\sqrt{2}$$

$$\therefore\ R=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

***Respuesta***

$\sqrt{\frac{5}{2}}$

## Pregunta N.° 39

Se colocan ocho monedas de igual radio, tangentes dos a dos, tangencialmente alrededor de una moneda de mayor radio, entonces la relación entre el radio de la moneda mayor y el radio de la moneda menor es:

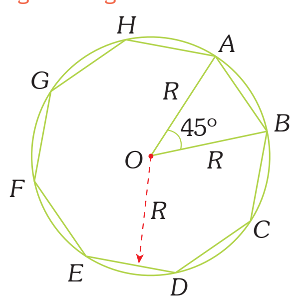
A) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-2$ B) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-1$

C) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{1}{8}$

### Resolución

***Tema***: Polígonos regulares

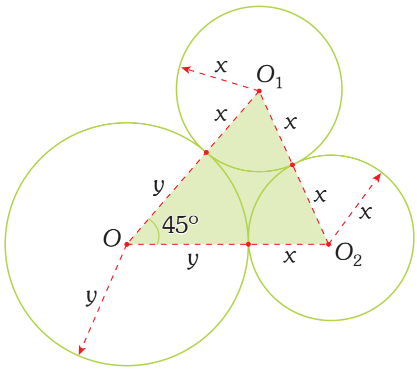



En un octógono regular $ABCDEFGH$

$$AB=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

***Análisis y procedimiento***

Nos piden $\dfrac{y}{x}$




Analizando el problema, $m\measuredangle O_1OO_2=\dfrac{360^\circ}{8}$ y $m\measuredangle O_1OO_2=45^\circ$.

En el $\triangle O_1OO_2$ elemental del octógono regular

$$2x=(y+x)\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$2x-x\sqrt{2-\sqrt{2}}=y\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

***Respuesta***

$$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-1$$

## Pregunta N.° 40

*ABCD-EFGH* es un hexaedro regular. Si *O* es el centro de *ABCD* y *R* es punto medio de $\overline{HG}$. Halle la medida del diedro que forman el plano *BRD* y la cara *EFGH*.

A) $\arctan(\sqrt{2})$

B) $\arctan(2)$

C) $\arctan(2\sqrt{2})$

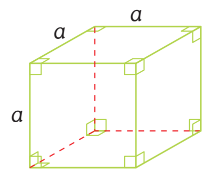
D) $\arctan(3\sqrt{2})$

E) $\arctan\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

### Resolución

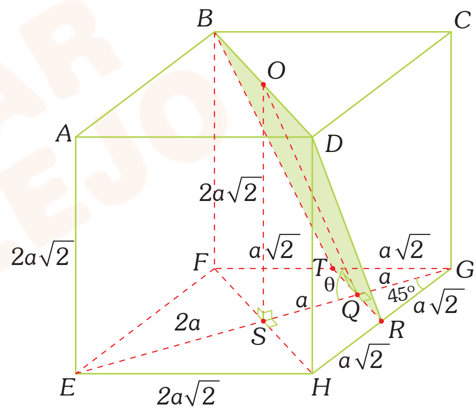
***Tema***: Poliedros regulares

El cubo o hexaedro regular es aquel poliedro limitado por 6 regiones cuadradas.




***Análisis y procedimiento***

Nos piden la medida del diedro que forman el plano *BRD* y la cara *EFGH*.




**Datos**

$BO=OD$ y $HR=RG$

Sea θ la medida del diedro que nos piden.

Luego, $\overleftrightarrow{TR}$ es la arista del ángulo diedro pedido.

Entonces

$$\tan\theta=\frac{2a\sqrt{2}}{a}$$

$$\therefore\ \theta=\arctan(2\sqrt{2})$$

***Respuesta***

$\arctan(2\sqrt{2})$