PARTE I

PREGUNTA N.° 1

Sea X una matriz de orden 2×2 que cumple con $(AX\,A^{-1})^t=3(A-I)$, donde $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, I matriz identidad.

Si la traza de X es -6. Calcule $(a+d)(b+c)$.

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Resolución

Tema: Matrices

Recuerde que

Si $A=(a_{ij})_{n\times n} \rightarrow$ $\boxed{\text{traz}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}}$

También para $A=(a_{ij})_{n\times n}$ y $B=(b_{ij})_{n\times n}$ se cumple

- $\text{traz}(A+B)=\text{traz}(A)+\text{traz}(B)$
- $\text{traz}(\lambda A)=\lambda\text{traz}(A)$; $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\text{traz}(A^t)=\text{traz}(A)$
- $\text{traz}(AB)=\text{traz}(BA)$

Análisis y procedimiento

Del dato se tiene que $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; además

$$(AXA^{-1})^t=3(A-I)$$

$$\text{traz}\left((AXA^{-1})^t\right)=\text{traz}(3(A-I))$$

$$\text{traz}\left((AX)A^{-1}\right)=3\,\text{traz}(A-I)$$

$$\text{traz}\left(A^{-1}(AX)\right)=3(\text{traz}(A)-\text{traz}(I))$$

$$\underbrace{\text{traz}(X)}=3(\text{traz}(A)-2)$$

$$-6\quad=3(\text{traz}(A)-2)$$

$$\rightarrow\ \underbrace{\text{traz}(A)}=0$$

$$a+d=0$$

$$\therefore\ (a+d)(b+c)=0$$

Respuesta

0

PREGUNTA N.° 2

Al resolver el sistema:

$$x\sqrt{\frac{x}{y}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}=34\ldots \qquad (1)$$

$$x-y=12\ldots \qquad (2)$$

se puede obtener soluciones enteras para x y para y; luego y es igual a:

A) 16
B) 8
C) 4
D) 2
E) 1

Resolución

Tema: Sistema de ecuaciones no lineales

Análisis y procedimiento

Dado el sistema no lineal

$$\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{x}{y}}+y\sqrt{\dfrac{y}{x}}=34 & (1) \\ x-y=12 & (2) \end{cases}$$

De (2): $x=y+12$

De (1): $x\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+y\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=34 \quad \times\sqrt{x}\sqrt{y}$

$$x^2+y^2=34\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$(y+12)^2+y^2=34\sqrt{(y+12)y}$$

$$\cancel{2}\left(y^2+12y\right)+\cancel{144}=\cancel{34}\sqrt{\left(y^2+12y\right)}$$

$$y^2+12y+72=17\sqrt{y^2+12y} \qquad (*)$$

Sea $a=\sqrt{y^2+12y}$, reemplazando en (*)

$$a^2+72=17a$$

$$a^2-17a+72=0$$

$$(a-8)(a-9)=0$$

$$a=8 \ \vee \ a=9$$

$$\rightarrow \sqrt{y^2+12y}=8 \ \vee \ \sqrt{y^2+12y}=9$$

$$y^2+12y=64 \ \vee \ \underbrace{y^2+12y=81}_{\text{No hay soluciones enteras para } y.}$$

$$y^2+12y-64=0$$

$$(y+16)(y-4)=0$$

$$y=-16 \ \vee \ y=4$$

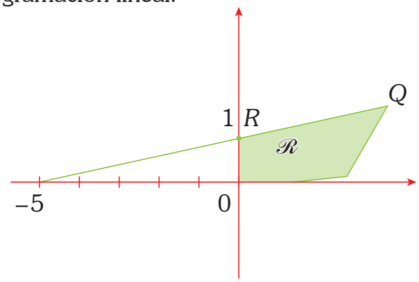
Pero $y>0$, entonces $y=4$.

Respuesta

4

PREGUNTA N.° 3

Dada la región admisible $\mathscr{R}$ del problema de programación lineal.



Determine la función objetivo del problema, de modo que, tanto el punto R como el punto Q sean soluciones mínimas.

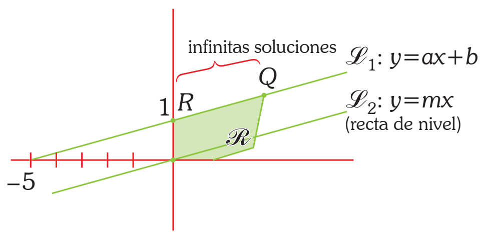
A) $x+4y$ B) $-x+7y$ C) $x+10y$
D) $-x-3y$ E) $x-5y$

Resolución

Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

Nos piden la función objetivo.



Como el problema de programación lineal tiene infinitas soluciones, entonces se cumple que $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$; es decir

$$(\text{pendiente de } \mathscr{L}_1)=(\text{pendiente de } \mathscr{L}_2)$$

$$a=m$$

Luego, como $(0;1) \wedge (-5;0) \in \mathscr{L}_1$, entonces

$$m=a=\frac{0-1}{-5-0}=\frac{1}{5} \ \rightarrow \ \mathscr{L}_2\text{: } y=\frac{1}{5}x$$

Finalmente, $x-5y=0$.

Por lo tanto, la función objetivo es $f(x;\,y)=x-5y$.

Respuesta

$x-5y$

Entonces podemos afirmar que

(a_n) converge a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Respuesta

(a_n) converge a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

PREGUNTA N.º 4

Dada la sucesión (a_n) definida por:

$$a_n=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi+(-1)^n 8}{4n}\right), n\in\mathbb{N}.$$

Entonces podemos afirmar que

A) (a_n) converge a $\sqrt{2}/2$
B) (a_n) converge a 1
C) (a_n) converge a 0
D) (a_n) converge a $\pi/4$
E) (a_n) no converge

Resolución

Tema: Sucesiones

Recuerde que

- (a_n) es sucesión convergente si y solo si $\lim a_n$ existe y es finito.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}(b_n)=\operatorname{sen}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\right)$

Análisis y procedimiento

$$a_n=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi+(-1)^n\cdot 8}{4n}\right)\to a_n=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(-1)^n\cdot 2}{n}\right)$$

Luego

$$\lim a_n=\lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$=\operatorname{sen}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$$

$$=\operatorname{sen}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cancelto{0}{\lim_{n\to+\infty}\frac{2(-1)^n}{n}}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

PREGUNTA N.º 5

Sea la función $f_{(x)}=\dfrac{3^x}{3^x+1}$, $x\geq 1$.

Determine el rango de f.

A) $[0,\,\infty\rangle$
B) $[1/2,\,\infty\rangle$
C) $[1,\,\infty\rangle$
D) $[3/4,\,1\rangle$
E) $[2,\,\infty\rangle$

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Sea

$$f_{(x)}=\frac{3^x}{3^x+1};\ x\geq 1$$

Tenemos que

$$f_{(x)}=\frac{3^x+1-1}{3^x+1}=1-\frac{1}{3^x+1}$$

Como

$$x\geq 1\ \to\ 3^x\geq 3^1$$
+1
$$\to\ 3^x+1\geq 4$$
invertir
$$\to\ 0<\frac{1}{3^x+1}\leq\frac{1}{4}$$
$\times(-1)$
$$\to\ 0>-\frac{1}{3^x+1}\geq-\frac{1}{4}$$
+1
$$\to\ 1>1-\frac{1}{3^x+1}\geq\frac{3}{4}$$

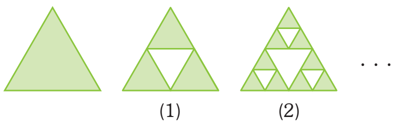
$$\to\ 1>f_{(x)}\geq\frac{3}{4}\to \operatorname{Ran}(f)=\left[\frac{3}{4};1\right\rangle$$

Respuesta

$[3/4,\,1\rangle$

PREGUNTA N.° 6

En el siguiente proceso de construcción tenemos inicialmente un triángulo equilátero de área 1, del cual vamos retirando paulatinamente los triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Determine el área total de los triángulos retirados.

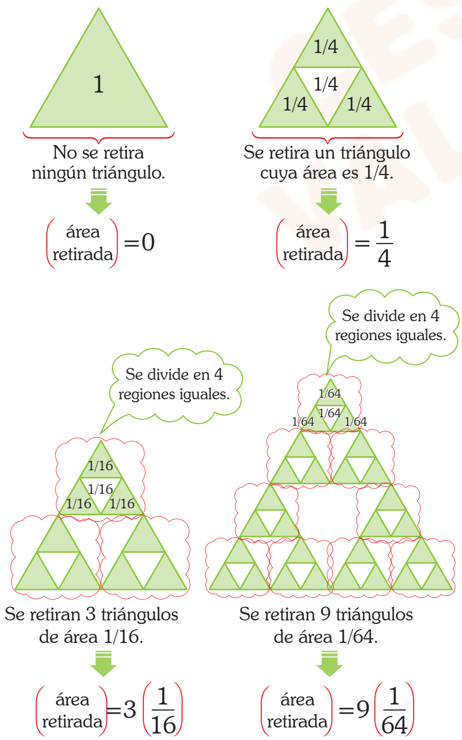


A) 4/8 B) 5/8 C) 6/8
D) 7/8 E) 1

Resolución

Tema: Sucesiones y series

Análisis y procedimiento



Luego sumamos las áreas retiradas.

$$S=0+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{128}+\ldots$$

$$S=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{128}+\ldots}_{S}\Bigg)$$

$$S=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}S \quad\to\quad \frac{1}{4}S=\frac{1}{4}$$

$\therefore \quad S=1$

Respuesta

1

PREGUNTA N.° 7

Si x_0 es la solución de la ecuación

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

calcule el valor de $\sqrt{x_0+34}$.

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

Resolución

Tema: Ecuación irracional

Análisis y procedimiento

Se tiene que x_0 es la solución de

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\sqrt{x+2\sqrt{128}}-7$$

Efectuando

$$\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}+7=\sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

$$\frac{(3+2\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)}\times\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}+7=\sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

$$(8+\sqrt{2})^2=\sqrt{x+16\sqrt{2}}^{\,2}$$

$$66+16\sqrt{2}=x+16\sqrt{2}$$

Entonces

$x=66$

Luego

$x_0=66$

Nos piden $\sqrt{x_0+34}$

$\therefore \quad \sqrt{66+34}=10$

Respuesta

10

PREGUNTA N.º 8

Determine la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones siguientes:

$$\frac{(x+3)^5(x+1)^8}{(x-1)^7(x-2)^4}\leq 0,$$

$$\frac{\sqrt[7]{x+2}\cdot\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x-5}\,\sqrt[6]{6-x}}\leq 0.$$

A) $[-3, 1\rangle$ B) $[-1, 6\rangle$ C) $[-1, 5\rangle$
D) $[-1, 1\rangle$ E) $[-3, 5\rangle$

Resolución

Tema: Inecuación fraccionaria-irracional

Tenga en cuenta lo siguiente:

- $\sqrt[2n]{a} \to a\geq 0, n\in\mathbb{N}$
- $a^{2n}b\leq 0 \to b\leq 0 \vee a=0$
- $a^{2n+1}b\leq 0 \to ab\leq 0$
- $\sqrt[2n+1]{a}\leq 0 \to a\leq 0$
- $\frac{N}{D}\leq 0 \to ND\leq 0, D\neq 0$

Análisis y procedimiento

De la primera inecuación

$$\frac{(x+3)^5\cancel{(x+1)^8}}{(x-1)^7\cancel{(x-2)^4}}\leq 0$$

$$\frac{(x+3)^5}{(x-1)^7}\leq 0;\ x=-1;\quad x\neq 2$$

$\leftrightarrow \quad (x+3)^5(x-1)^7\leq 0; x=-1; x\neq 2; x\neq 1$

$\leftrightarrow \quad (x+3)(x-1)\leq 0$

Entonces

$CS=[-3; 1\rangle$

De la segunda inecuación

$$\frac{\sqrt[7]{x+2}\,\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x-5}\,\sqrt[6]{6-x}}\leq 0$$

- Hallemos el CVA; entonces

  $x+1\geq 0 \wedge 6-x>0$

  $x\geq -1 \wedge x<6$

  $CVA=[-1; 6\rangle$

- Efectuamos

$$\frac{\sqrt[7]{x+2}\,\cancel{\sqrt[4]{x+1}}}{\sqrt[3]{x-5}\,\cancel{\sqrt[6]{6-x}}}\leq 0$$

$$\frac{\sqrt[7]{x+2}}{\sqrt[3]{x-5}}\leq 0;\ x\neq 5$$

$\to \quad \sqrt[7]{x+2}\,\sqrt[3]{x-5}\leq 0$

$\to \quad (x+2)(x-5)\leq 0$

$x\in[-2; 5\rangle$

Luego

$CS=[-2; 5\rangle \cap CVA=[-1; 5\rangle$

Nos piden

$[-3; 1\rangle \cap [-1; 5\rangle$,

es decir $[-1; 1\rangle$.

Respuesta

$[-1; 1\rangle$

PREGUNTA N.º 9

Sea f una función definida por $f(x)=(1-x^3)^{1/3}+1$, $x\in\mathbb{R}$. Determine la inversa f^* de f.

A) $f^*(x)=1-(x^2-1)^{1/3}, x\in\mathbb{R}$
B) $f^*(x)=1-(x-1)^{3/2}, x\in[0, +\infty\rangle$
C) $f^*(x)=(1-x^3)^{1/3}, x\in\mathbb{R}$
D) $f^*(x)=(1-(x-1)^3)^{1/3}, x\in\mathbb{R}$
E) $f^*(x)=(1-(x-1)^{1/3})^3, x\in[0, +\infty\rangle$

Resolución

Tema: Función inversa

Tenga en cuenta

Dada: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, biyectiva

- $\text{Dom}(f)=\text{Ran}(f^*)$
- $\text{Ran}(f)=\text{Dom}(f^*)$
- Para hallar f^* se despeja x en función de y.

Análisis y procedimiento

Se tiene $f_{(x)}=\sqrt[3]{1-x^3}+1,\ x\in\mathbb{R}$

Luego

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$\text{Ran}(f)=\mathbb{R}$

Sea $y=\sqrt[3]{1-x^3}+1$

Despejamos x en función de y.

$$\sqrt[3]{1-x^3}=y-1$$

$$1-x^3=(y-1)^3$$

$$f^*_{(x)}=\sqrt[3]{1-(x-1)}$$

Luego

$$f^*_{(x)}=\left(1-(x-1)^3\right)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$$

Nos piden f^*

$$f^*_{(x)}=\left(1-(x-1)^3\right)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$$

Respuesta

$f^*_{(x)}=\left(1-(x-1)^3\right)^{1/3},\ x\in\mathbb{R}$

PREGUNTA N.° 10

Considere $S_n=i+i^2+i^3+\ldots+i^n$, donde $i^2=-1$, con $n\in\mathbb{N}$. Dadas las siguientes proposiciones.

I. $S_n+S_{n+1}=i$, si n es impar.

II. $S_n=S_{n-1}+S_{n+1}$, si n es par.

III. $S_n=-1$, si n tiene la forma $n=4k+3$, con k entero no negativo.

Son correctas:

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) I y II

E) I y III

Resolución

Tema: Números complejos

Recuerde que

- $i^{\overset{\circ}{4}}=1$
- $i^{\overset{\circ}{4}+k}=i^k$
- $i^1+i^2+i^3+\ldots+i^{\overset{\circ}{4}}=0$

Análisis y procedimiento

Tenemos que $S_n=i+i^2+i^3+\ldots+i^n$

$$S_n=\begin{cases}0 & ;\ n=\overset{\circ}{4}\\ i & ;\ n=\overset{\circ}{4}+1\\ i-1 & ;\ n=\overset{\circ}{4}+2\\ -1 & ;\ n=\overset{\circ}{4}+3\end{cases}$$

I. **Falso**

Consideremos $n=1$

$S_1+S_2=i+i-1=2i-1$

II. **Falso**

Consideremos $n=4$

$S_4=0$

$S_3=-1$

$S_5=i$

$S_3+S_5=-1+i\neq S_4=0$

III. **Verdadero**

Si $S_n=-1$ del análisis inicial, entonces $n=\overset{\circ}{4}+3$, es decir, $n=4k+3$; $k\in\mathbb{Z}$.

Luego, en particular, la proposición se verifica para $k\in\mathbb{Z}_0^+$.

Por lo tanto, la proposición correcta es solo III.

Respuesta

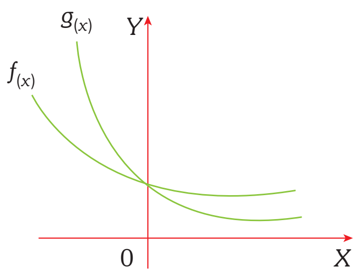
Solo III

PREGUNTA N.º 11

Sean las funciones

$f_{(x)}=c(a^x)$ y $g(x)=d(b^x)$,

cuyas gráficas se muestran a continuación.



Indique cuál(es) de las siguientes proposiciones son correctas:

I. $c=d$

II. $0 < a < b < 1$

III. $a+b > 1$

A) solo I B) solo II C) I y II

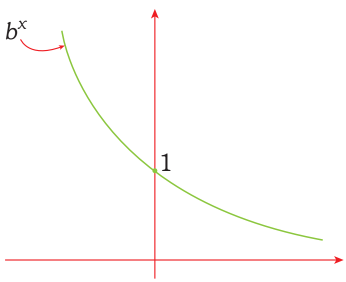
D) I y III E) II y III

Resolución

Tema: Funciones exponenciales

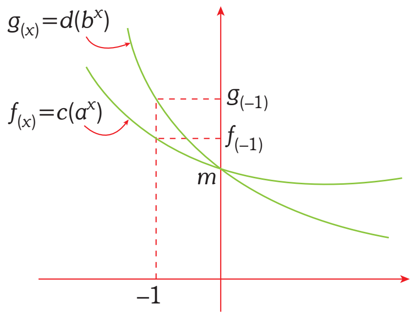
Recuerde que

Si $0 < b < 1$, entonces



Análisis y procedimiento

Analicemos el gráfico



I. **Correcta**

Recordemos que $m=f_{(0)} \wedge m=g_{(0)}$

Entonces $f_{(0)}=g_{(0)}$

$c=d$; además c; $d > 0$

II. **Incorrecta**

Del gráfico se observa que

$$g_{(-1)} > f_{(-1)} \rightarrow \frac{d}{b} > \frac{c}{a}$$

Como $c=d$ y son positivos

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

Además a; $b \in \langle 0; 1\rangle$, entonces

$$0 < b < a < 1$$

III. **Incorrecta**

Consideremos

$$b=\frac{1}{3} \wedge a=\frac{1}{2}$$

Se cumple

$$0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$$

Pero

$$a+b=\frac{5}{6}<1$$

Respuesta

solo I

PREGUNTA N.° 12

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Si $AX=A^T$; halle $\frac{2}{3}X^T$.

A) $\begin{pmatrix}4/3 & -2/3\\ 2 & -2/3\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}4/3 & 4/3\\ -2 & -2/3\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}4/3 & -2/3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}2/3 & -2/3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Resolución

Tema: Matrices

Recuerde que

- $(AB)^T=B^TA^T$
- $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- $(A^T)^T=A$
- $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Análisis y procedimiento

Tenemos $AX=A^T$

Calculemos la transpuesta

$$(AX)^T=(A^T)^T$$

$$X^TA^T=A$$

$$X^T=A(A^T)^{-1}$$

$$X^T=A(A^{-1})^T$$

Tenemos por dato

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}^T$$

$$\frac{2}{3}X^T=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \frac{2}{3}X^T=\begin{pmatrix}4/3 & -2/3\\ 2 & -2/3\end{pmatrix}$$

Respuesta

$\begin{pmatrix}4/3 & -2/3\\ 2 & -2/3\end{pmatrix}$

PREGUNTA N.° 13

Un comerciante tiene que formar paquetes diferentes de 8 unidades de frutas, para ello debe escoger entre plátanos y peras. Cada plátano cuesta S/.0,20 y cada pera S/.0,50. ¿Cuál es el promedio de la venta de los paquetes?

Asúmase que hay suficientes plátanos y peras.

A) 2,77
B) 2,79
C) 2,80
D) 3,00
E) 3,10

Resolución

Tema: Promedios

Análisis y procedimiento

Como el comerciante debe formar paquetes de 8 unidades y debe escoger entre plátanos y peras, las opciones que tendría son:

paquetes de 8 frutas			precios de venta de los paquetes
plátano	pera		
0	8	$\rightarrow$	$0(0{,}2)+8(0{,}5)=4$
1	7	$\rightarrow$	$1(0{,}2)+7(0{,}5)=3{,}7$
2	6	$\rightarrow$	$2(0{,}2)+6(0{,}5)=3{,}4$
3	5	$\rightarrow$	$3(0{,}2)+5(0{,}5)=3{,}1$
4	4	$\rightarrow$	$4(0{,}2)+4(0{,}5)=2{,}8$
5	3	$\rightarrow$	$5(0{,}2)+3(0{,}5)=2{,}5$
6	2	$\rightarrow$	$6(0{,}2)+2(0{,}5)=2{,}2$
7	1	$\rightarrow$	$7(0{,}2)+1(0{,}5)=1{,}9$
8	0	$\rightarrow$	$8(0{,}2)+0(0{,}5)=1{,}6$

9 posibles paquetes

Para hallar el precio promedio de venta de los paquetes (PPVP), usaremos

$$(\text{PPVP})=\frac{\text{suma de los precios de venta de los paquetes}}{\text{cantidad de paquetes}}$$

$$(\text{PPVP})=\frac{4+3{,}7+3{,}4+3{,}1+2{,}8+2{,}5+2{,}2+1{,}9+1{,}6}{9}$$

$$(\text{PPVP})=2{,}8$$

Respuesta

2,80

PREGUNTA N.° 14

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado; donde P indica la probabilidad.

I. Si los conjuntos no vacíos A y B son disjuntos, entonces $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

II. Sean

$$A=\{(x,\ y)/x\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\};\ y\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}\}$$

$$B=\{(x,\ y)\in A/4<x+y\leq 6\}$$

entonces $P(B)=\dfrac{2}{9}$.

III. $P(E\Delta D)=P(E\cap D^C)+P(E^C\cap D)$

A) VVV B) VFV C) FVF
D) FFV E) FFF

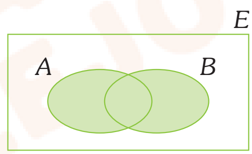
Resolución

Tema: Teoría de probabilidades

Tenga en cuenta que, para los eventos A y B, incluidos en un espacio muestral E, se cumple que la probabilidad de la unión de estos eventos es

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Gráficamente



La posibilidad de $(A\cup B)$ es el área sombreada.

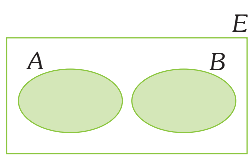
Análisis y procedimiento

I. **Falsa**

Como A y B son disjuntos $\rightarrow$ $A\cap B=\phi$

$\therefore$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Gráficamente



Probabilidad de $(A\cup B)$ es el área sombreada.

II. **Falsa**

$$A=\{(x;y)/x\in\{1;2;3;4;5;6\};y\in\{1;2;3;4;5;6\}\}$$

$$A=\{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),\ldots,(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\}$$

$$\rightarrow n(A)=6\times 6=36$$

$$B=\{(x;y)\in A/4<x+y\leq 6\}$$

Entonces $x+y=5$ o $x+y=6$

$$B=\{(1;4),(2;3),(3;2),(4;1),(1;5),(2;4),(3;3),(4;2),(5;1)\}$$

$\rightarrow n(B)=9$

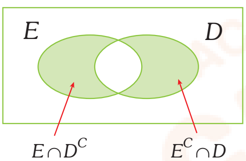
Entonces hallamos la probabilidad de B (respecto de A)

$$P_{(B)}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

III. **Verdadera**

$$P(E\cap D)=P(E\cap D^C)+P(E^C\cap D)$$

Graficamos el conjuntos $E\Delta D$.



Respuesta

FFV

PREGUNTA N.° 15

Dados $\overline{abcd}=\overset{o}{5}+2$, $\overline{dabc}=\overset{o}{9}+2=\overset{o}{11}+7$, donde $\overline{dabc}$ es el menor número con las propiedades indicadas con $d\neq 0$ y $a=0$. Determine el valor de $E=(a)(b)+(c)(d)$

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

Resolución

Tema: Teoría de divisibilidad

Análisis y procedimiento

De los datos tenemos

- $\overline{abcd}=\overset{o}{5}+2$, entonces $d=2$ o $d=7$
- $\overline{dabc}=\overset{o}{9}+2+\underset{\overset{o}{9}}{27}$
- $\overline{dabc}=\overset{o}{11}+7+\underset{\overset{o}{11}}{22}$

$\overline{dabc}=\overset{o}{99}+29$

- $\overline{dabc}$ es mínimo donde $d\neq 0$ y $a\neq 0$

Como queremos que $\overline{dabc}$ sea mínimo y d tiene la opción de ser 2 o 7,

$\rightarrow\ d=2$

Reemplazamos este valor en el dato

$$\overline{dabc}=\overset{o}{99}+29$$

$$\overline{2abc}=99k+29$$

Debemos buscar el menor k que cumpla las condiciones.

Si $k=20$

$\overline{2abc}=99(20)+29$

$\overline{2abc}=2009$

(se descarta esta solución porque $a=0$)

Si $k=21$

$\overline{2abc}=99(21)+29$

$\overline{2abc}=2108$

(este es el menor número que cumple las condiciones)

Entonces, $a=1$; $b=0$; $c=8$ y $d=2$.

$\therefore\ (a)(b)+(c)(d)=16$

Respuesta

16

PREGUNTA N.º 16

Indique la alternativa correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado:

I. $\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+....=0$

II. Cada número irracional se puede aproximar por un número racional.

III. Si $A=\langle 0,\ 1\rangle \cap \mathbb{Q}^c$, entonces $\frac{1}{2}\in A$, donde $\mathbb{Q}^c$ indica el complemento del conjunto de los números racionales.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFF

Resolución

Tema: Números racionales

Análisis y procedimiento

I. **Falso**

Sea

$$S_n=\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\ldots}_{n\text{ sumandos}}$$

Si n es par

$$S_n=\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{0}+\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{0}+\ldots+\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{0}$$

$\rightarrow\ S_n=0$

Si n es impar

$$S_n=\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{0}+\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{0}+\ldots\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{2}}_{0}+\sqrt{2}$$

$\rightarrow\ S_n=\sqrt{2}$

Por lo tanto, cuando se tiene infinitos sumandos, no se puede determinar S_n.

II. **Verdadero**

Porque todo número irracional se puede expresar como fracción continua simple infinita (FCSI) y toda FCSI se puede aproximar a un número irracional.

Ejemplo

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2\ddots}}}=[1;\overline{2}]$$

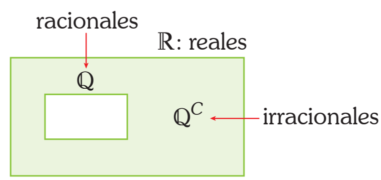
Luego, teniendo la FCSI de $\sqrt{2}$, podemos aproximarlo a un número racional

- $\sqrt{2}=1$ (1.ª convergencia)
- $\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (2.ª convergencia)
- $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}$ (3.ª convergencia)

Se observa que un número irracional $(\sqrt{2})$ se puede aproximar a un número racional.

III. **Falso**

Gráficamente



Además

$$A=\langle 0;1\rangle\cap\underbrace{\mathbb{Q}^C}_{\text{irracionales}}$$

A=irracional

$\rightarrow\ \frac{1}{2}\notin A$

Respuesta

FVF

PREGUNTA N.º 17

Las notas obtenidas por tres postulantes hacen un promedio de 15. La relación entre las notas del primero y el segundo es 4/5 y la relación entre el segundo y tercero es 5/6. Calcule la diferencia entre la mayor y menor nota.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

Resolución

Tema: Promedios

Análisis y procedimiento

Se tienen tres postulantes

notas: a b c

Por condición del enunciado

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{4}{5}\\ \frac{b}{c}&=\frac{5}{6}\end{aligned}\right\}\quad \frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=k \qquad \text{(I)}$$

Por dato, el promedio de notas es 15.

$$\frac{a+b+c}{3}=15 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$\frac{4k+5k+6k}{3}=15$$

$$k=3$$

Luego,

$a=12$; $b=15$ y $c=18$.

Nos piden la diferencia entre la mayor y menor nota.

$c-a=18-12=6$

Respuesta

6

PREGUNTA N.º 18

Si se cumple que $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$, calcule el valor de $a+b-c$, sabiendo que a, b, c son positivos.

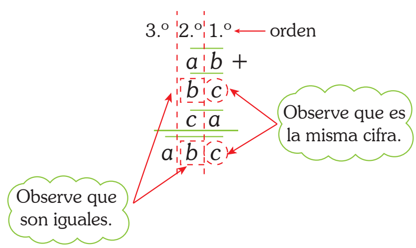
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Tema: Cuatro operaciones

Análisis y procedimiento

Planteamos la adición en forma vertical



En el orden 1

$b+c+a=\overline{1c}$

$b+a=10$ (I)

Nótese que llevaremos una unidad al orden 2.

En el orden 2

$$a+b+c+1=\overline{1b}$$

$$a+c+1=10$$

$$a+c=9 \qquad \text{(II)}$$

Nótese que llevaremos una unidad al orden 3.

En el orden 3

$$a=1 \qquad \text{(III)}$$

De I, II y III, hallamos los valores de a, b y c.

$a=1$; $b=9$ y

$c=8$

$$\therefore \qquad a+b-c=2$$

Respuesta

2

PREGUNTA N.º 19

Una persona dispone de cierto capital, el cual es dividido en dos partes. La mayor parte la impone al 14% anual y la otra parte al 8% semestral. Si al cabo de un año los montos obtenidos son iguales, determine el capital inicial, sabiendo que las partes se diferencian en 1200. Todas las cantidades están en nuevos soles.

A) 128 000
B) 132 000
C) 136 000
D) 138 000
E) 140 000

Resolución

Tema: Regla de interés

Para calcular el monto (M) y el interés (I), tenga en cuenta lo siguiente:

- $M=C+I$
- $I=C\times\underbrace{r\%\,t}_{\substack{\text{mismas}\\ \text{unidades}}}$

Análisis y procedimiento

Sea el capital inicial C dividido en 2 partes:

C_1 y C_2.

$C=C_1+C_2$

Por condición

Parte	Tasa	Tiempo	Interés
C_1	14% anual	1 año	$C_1\times 14\%\times 1$
C_2	8% semestral	1 año <> 2 semestres	$C_2\times 8\%\times 2$

Por dato, los montos son iguales.

$$M_1=M_2$$

$$C_1+C_1\times 14\%\times 1=C_2+C_2\times 8\%\times 2$$

$$114\%C_1=116\%C_2$$

$$57C_1=58C_2$$

$$\frac{C_1}{58}=\frac{C_2}{57}=\frac{\overbrace{1200}^{C_1-C_2}}{1} \leftarrow \text{(dato)}$$

$$\to \underbrace{C_1+C_2}=(58+57)\cdot 1200$$

$$\therefore \quad C=138\ 000$$

Respuesta

138 000

PREGUNTA N.º 20

Si una cadena de 16 kilates cuyo peso de metal ordinario es 32 gramos se funde con un lingote de oro de 104 gramos con ley 0,65. De cuántos kilates es la aleación obtenida.

A) 0,651
B) 0,658
C) 15,600
D) 15,792
E) 34,442

Resolución

Tema: Aleación

Sabemos que

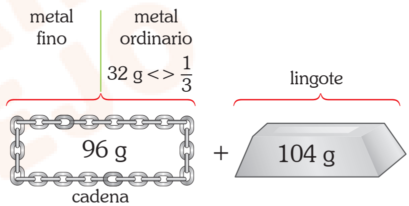
Metal : | metal fino | metal ordinario |

Entonces

- $\text{Ley}=\dfrac{\text{Peso metal fino}}{\text{Peso total}}$
- $\text{Liga}=\dfrac{\text{Peso metal ordinario}}{\text{Peso total}}$
- $\text{Ley}+\text{liga}=1$
- $(\text{N.º de kilates})=24\times\text{ley}$

Análisis y procedimiento

Del enunciado



Ley=16 kilates ley=0,650

$$\text{Ley}=\frac{16}{24}<>\frac{2}{3} \qquad \text{Ley}=24\times 0{,}65 \text{ kilates}$$

$$\text{Ley}=15{,}6 \text{ kilates}$$

Luego, el N.º de kilates de la aleación (Ley) es

$$(\text{N.º de kilates})=\frac{96(16)+104(15{,}6)}{96+104}=15{,}792$$

$\therefore$ Ley=15,792 kilates

Respuesta

15,792

PARTE II

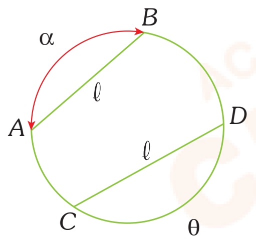
PREGUNTA N.° 21

Calcule el perímetro de un heptágono regular *ABCDEFG*, si: $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{5}$.

A) 34 B) 35 C) 36
D) 37 E) 38

Resolución

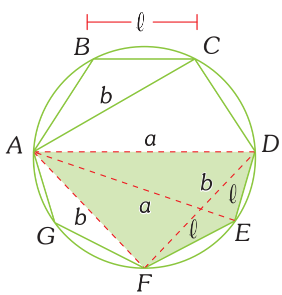
Tema: Polígonos regulares
Recuerde que



Si $AB=CD$
$\alpha=\theta$

Análisis y procedimiento
Piden el perímetro del heptágono regular ($2p$).

Dato $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{5}$; siendo $AE=a$ y $AC=b$



Como $\triangle ADEF$ es un cuadrilátero inscrito, aplicamos el teorema de Ptolomeo, entonces

$$a\cdot\ell+b\cdot\ell=a\cdot b$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\ell}$$

Luego, del dato
$$\ell=5$$

Nos piden $2p$.
$$2p=7\ell$$
$$2p=7(5)$$

$\therefore\quad 2p=35$

Respuesta
35

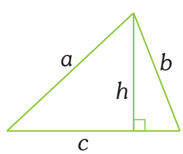
PREGUNTA N.° 22

La generatriz de un cilindro oblicuo de base circular mide igual que el diámetro del cilindro disminuido en 10 dm. Sean *M* y *N* los centros de las bases y $\overline{AB}$ un diámetro de la base inferior que contiene a *N*. Si $AM=19$ dm y $MB=13$ dm entonces el volumen del cilindro (en dm^3) es:

A) $130\pi\sqrt{103}$
B) $131\pi\sqrt{104}$
C) $132\pi\sqrt{105}$
D) $133\pi\sqrt{106}$
E) $134\pi\sqrt{107}$

Resolución

Tema: Geometría del espacio: cilindro
Recuerde que

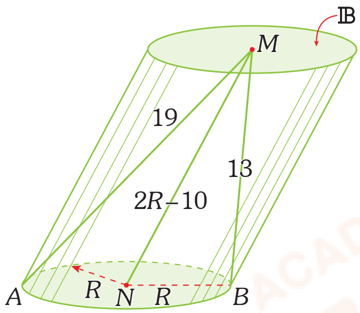


$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\boxed{h=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden el $\mathbb{V}_{\text{cilindro}}$.



Dato

$MN=2R-10$

Por el teorema de la mediana ($\triangle AMB$)

$$19^2+13^2=2(2R-10)^2+\frac{(2R)^2}{2}$$

$$361+169=2(2R-10)^2+2R^2$$

$$R^2-8R-33=0$$

Resolviendo, $R=11$; de allí $\mathbb{B}=\pi(11)^2$.

Calculamos la altura del cilindro usando el teorema de Herón: ($\triangle AMB$).

$$h=\frac{2}{AB}\sqrt{27\cdot 14\cdot 8\cdot 5}=\frac{12}{11}\sqrt{105}$$

$$\therefore\quad \mathbb{V}_{\text{cilindro}}=B\cdot h=132\pi\sqrt{105}$$

Respuesta

$132\pi\sqrt{105}$

PREGUNTA N.° 23

Sea *ABCD* un cuadrilátero, donde el ángulo exterior *D* mide la mitad del ángulo interior *B* y la diagonal $\overline{BD}$ biseca al ángulo *ABC*. Si $BC=25$ u y $BD=20$ u, determine *AB* (en u).

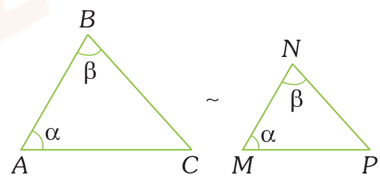
A) 12
B) 14
C) 16
D) 18
E) 20

Resolución

Tema: Semejanza de triángulos

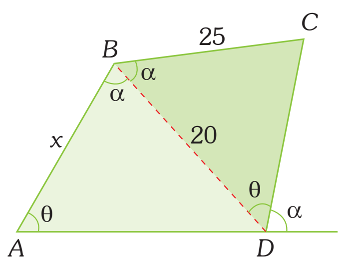
Análisis y procedimiento

Para que dos triángulos sean semejantes, solo es necesario que tengan un par de ángulos de la misma medida.



$$\boxed{\triangle ABC\sim\triangle MNP}$$

Nos piden $AB=x$.



En el $\triangle ABD$, por el teorema del ángulo exterior, se tiene que

$$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BDC = \theta$$

Se observa $\triangle ABD \sim \triangle DBC$, entonces

$$\frac{x}{20} = \frac{20}{25}$$

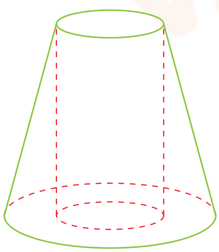
$\therefore \quad x = 16$

Respuesta

16

PREGUNTA N.º 24

La altura de un cono circular recto mide 15 cm y el radio de su base 8 cm. Se taladró un agujero cilíndrico de diámetro 4 cm en el cono, a lo largo de su eje, resultando un sólido como el que se muestra en la figura. Calcule el volumen de ese sólido.



A) 240π cm^3

B) 254π cm^3

C) 260π cm^3

D) 264π cm^3

E) 270π cm^3

Resolución

Tema: Cono de revolución

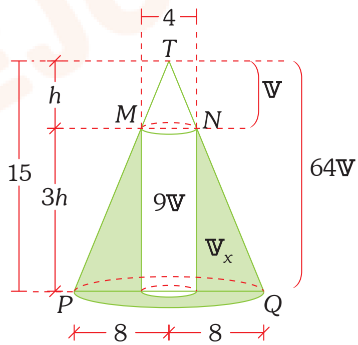
Recuerde que

- En conos semejantes, la razón de volúmenes es igual a la razón de sus líneas homólogas elevadas al cubo.
- Si el cilindro y el cono son de igual base, entonces sus volúmenes están en la razón de un tercio de sus alturas.

Análisis y procedimiento

Piden $\mathbb{V}_x$.

$\mathbb{V}_x$: volumen del sólido después del taladrado



Por semejanza de conos

$$\begin{pmatrix}\text{cono}\\ \text{menor}\end{pmatrix}(TMN) \sim \begin{pmatrix}\text{cono}\\ \text{mayor}\end{pmatrix}(TPQ)$$

La razón de sus bases es de 1:4; entonces la razón de sus volúmenes es de 1:64.

$\rightarrow \quad \mathbb{V}_x + 10\mathbb{V} = 64\mathbb{V}$

$\mathbb{V}_x = 54\mathbb{V} \qquad \text{(I)}$

Luego

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{cono}\\\text{mayor}}}=\frac{1}{3}\times(\pi 8^2)\times(15)$$

Entonces

$$64\mathbb{V}=\mathbb{V}_{\substack{\text{cono}\\\text{mayor}}}$$

$$\mathbb{V}=5\pi \qquad \text{(II)}$$

De (II) y (I)

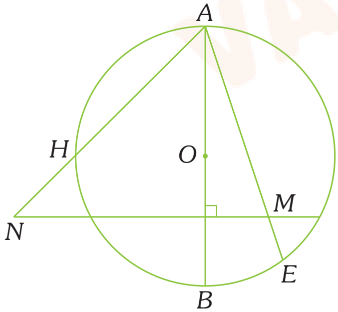
$$\mathbb{V}_x=270\pi$$

Respuesta

$270\pi\ \text{cm}^3$

PREGUNTA N.º 25

En la figura, O centro de la circunferencia. Si $NH=11$, $AM\times AE=900$ y $m\angle ANM=45º$, entonces la longitud del diámetro de la circunferencia es:



A) $5\sqrt{2}$

B) $10\sqrt{2}$

C) $15\sqrt{2}$

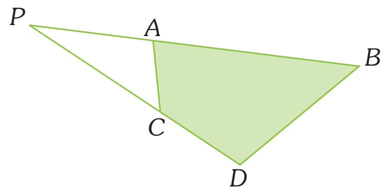
D) $20\sqrt{2}$

E) $25\sqrt{2}$

Resolución

Tema: Relaciones métricas en la circunferencia

Tenga en cuenta que

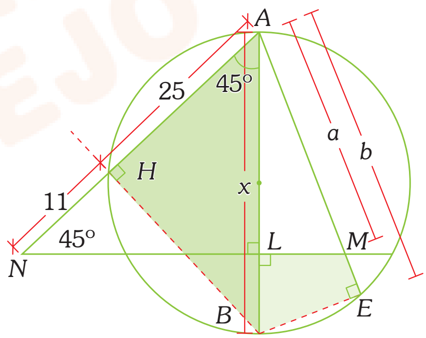


Si $\square_{ABCD}$: inscriptible, entonces

$$\boxed{PB\cdot PA=PD\cdot PC}$$

Análisis y procedimiento

Piden $AB=x$.



Dato: $ab=900$

En el $\square_{LMEB}$ (inscriptible): $(AL)(AB)=ab=900$

En el $\square_{LHNB}$ (inscriptible): $(AN)(AN-11)=(AL)(AB)=900$

Como $(AN)(AN-11)=900$, entonces $AN=36$ y $AH=25$.

En el $\triangle AHB$: notable 45º.

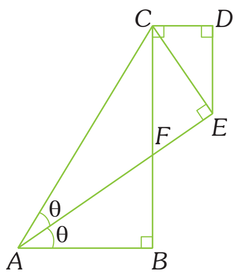
$\therefore\quad x=25\sqrt{2}$

Respuesta

$25\sqrt{2}$

PREGUNTA N.° 26

En la figura, $BF=3$ u y $ED=4$ u. Calcule el valor del segmento CF (en u).

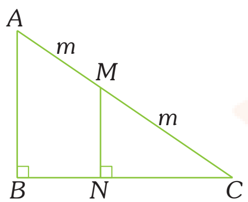


A) 4,5 B) 5 C) 5,5
D) 6 E) 6,5

Resolución

Tema: Aplicaciones de la congruencia

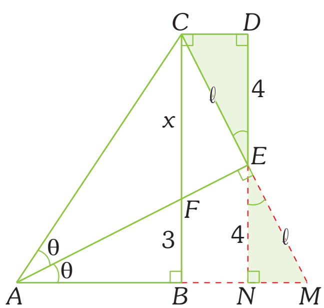
En el $\triangle ABC$, $\overline{MN}$ es base media.



$$MN=\frac{AB}{2}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden $CF=x$.
Datos: $BF=3$ u y $ED=4$ u



Se prolonga $\overline{CE}$, entonces el $\triangle ACM$ es isósceles y $CE=EM=\ell$.

Luego se prolonga $\overline{DE}$ hasta intersecar a $\overline{BM}$; entonces

$\triangle CDE \cong \triangle MNE$; $DE=EN=4$

En el $\triangle CBM$, $\overline{EN}$ es base media; entonces

$$4=\frac{x+3}{2}$$

$\therefore \quad x=5$

Respuesta

5

PREGUNTA N.° 27

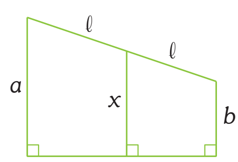
Dado un cuadrado $ABCD$ de lado $a>6$, exterior a un plano P. Si las distancias de A, B y C al plano P son 3 u, 6 u y 7 u respectivamente, halle la distancia de D al plano P (en u).

A) 3
B) 3,5
C) 4
D) 4,5
E) 5

Resolución

Tema: Geometría del espacio

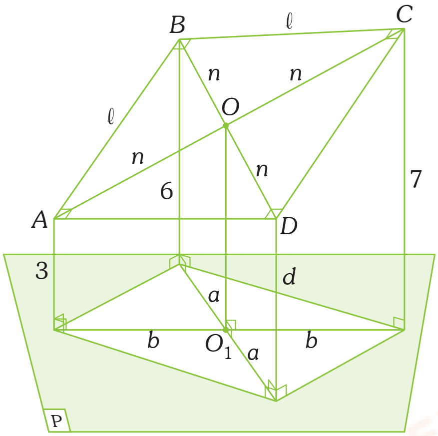
Recuerde que



$$x=\frac{a+b}{2}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden $d(D;\ \square P)=d$.



Si *ABCD* es un cuadrado, entonces su proyección es una región paralelográmica.

Por teorema, en ⏢, tenemos que

$$OO_1=\frac{d+6}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$OO_1=\frac{3+7}{2} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) y (II)

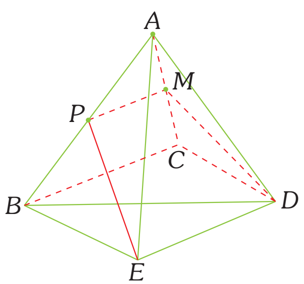
$d=4$

Respuesta

4

PREGUNTA N.° 28

El gráfico muestra una pirámide regular.



Si $ED=6$ u, $\overline{PM}//\overline{BC}$, $\frac{AP}{PB}=2$, $m\measuredangle BAE=60°$ y la distancia de *A* al plano que contiene los puntos *P*; *M* y *D* es 3 u, calcule el volumen de u^3 de la pirámide *A*-*PMDE*.

A) $2\sqrt{27}$
B) $3\sqrt{27}$
C) $4\sqrt{27}$
D) $5\sqrt{27}$
E) $6\sqrt{27}$

Resolución

Tema: Geometría del espacio: pirámide

Análisis y procedimiento

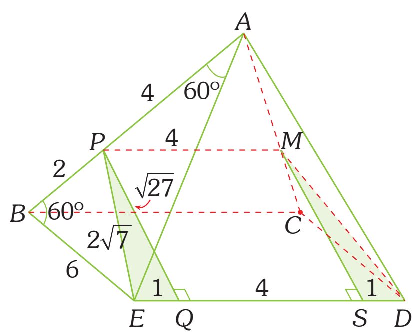
Nos piden

$$\mathbb{V}_{A\text{-}PMDE}=\frac{\left(\mathbb{A}_{PMDE}\right)\cdot\ h}{3},$$

donde *h* es la distancia de *A* al plano y $\mathbb{A}_{PMDE}$ es el área de la región *PMDE*.

Dato: $h=3$

Como $m\measuredangle BAE=60°$, las aristas básicas y las laterales serán congruentes. Luego



En el △*PBE* (teorema de cosenos)

$$PE^2=2^2+6^2-2(6)(2)\cos 60°$$

$$PE=2\sqrt{7}$$

En el ⏢$EPMD$ (trapecio isósceles)

$EQ=SD=1$, además,

$\triangle EQP$: $PQ=\sqrt{27}$

Luego

$$\mathbb{A}_{⏢PMDE}=\left(\frac{6+4}{2}\right)\sqrt{27}$$

Finalmente

$$\mathbb{V}_{A\text{-}PMDE}=\frac{3}{3}(5\sqrt{27})$$

$$\mathbb{V}_{A\text{-}PMDE}=5\sqrt{27}$$

Observación

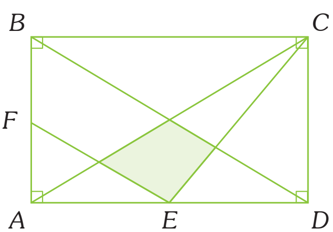
El dato "La distancia de A al plano que contiene los puntos P, M y D es 3" es incorrecto, ya que sin ese dato, y únicamente con los otros, la pirámide está determinada; incluso se puede calcular la distancia de A al plano que pasa por P, M y D y no resulta ser 3.

Respuesta

$5\sqrt{27}$

PREGUNTA N.º 29

En la figura, $BC=16$, $AB=12$, E y F son puntos medios. Determine el área del cuadrilátero sombreado.

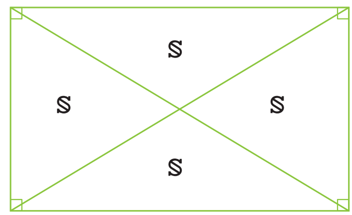


A) 10 B) 15 C) 20
D) 21 E) 25

Resolución

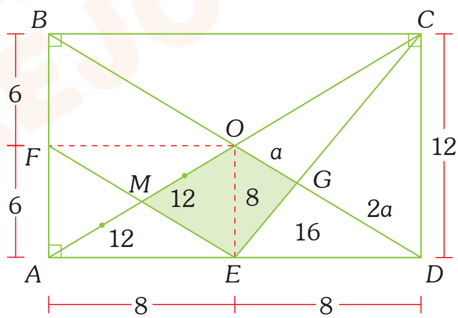
Tema: Áreas de regiones triangulares

En un rectángulo, se cumple que



Análisis y procedimiento

Nos piden el área de la región sombreada: $\mathbb{A}_{⏢}$.
Nótese que G es baricentro de la región ADC.



La región sombreada la calculamos como la suma de áreas de dos regiones triangulares.

$$\mathbb{A}_{⏢}=\mathbb{A}_{\triangle OME}+\mathbb{A}_{\triangle OGE}$$

$$\mathbb{A}_{⏢}=12+8$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{⏢}=20$$

Respuesta

20

PREGUNTA N.° 30

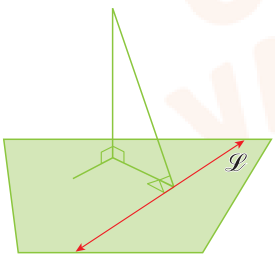
Sea $ABCD$ un rectángulo, M punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{PM}$ perpendicular al plano ABC, O centro del rectángulo, si $BC=2AB=8$ y $PM=AB$, entonces el área de la región triangular APO es:

A) $2\sqrt{6}$
B) $3\sqrt{6}$
C) $4\sqrt{6}$
D) $7\sqrt{6}$
E) $8\sqrt{6}$

Resolución

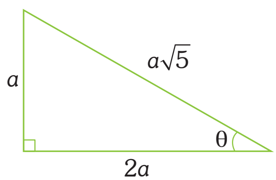
Tema: Geometría del espacio

Por el teorema de las tres perpendiculares



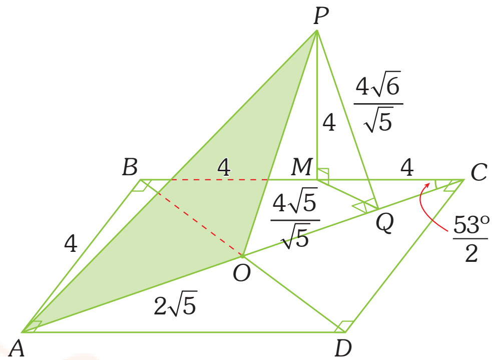
Además

Si $\theta=\dfrac{53°}{2}$



Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle APO}$.



Datos

$\overline{PM}\perp \square_{ABCD}$ y $PM=AB=4$

$$\mathbb{A}_{\triangle APO}=\frac{(AO)(PQ)}{2}$$

Por fórmula básica

$\triangle ABC$: notable de $\dfrac{53°}{2}$

Del gráfico, $AO=2\sqrt{5}$ y $MQ=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$;

luego $PQ=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

Reemplazamos:

$$\mathbb{A}_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\left(\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\therefore\quad \mathbb{A}_{\triangle APO}=4\sqrt{6}$$

Respuesta

$4\sqrt{6}$

PREGUNTA N.° 31

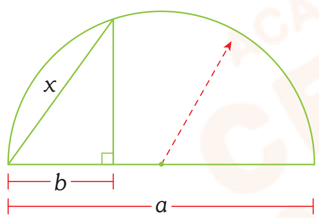
En un rectángulo $ABCD$ ($AB < BC$), se dibuja una semicircunferencia con diámetro $\overline{AD}$ tangente a $\overline{BC}$ en P. Se ubica el punto Q en $\overline{PC}$ y se traza $\overline{QE}$ perpendicular a $\overline{PC}$ donde el punto E está sobre la semicircunferencia. Si $PQ=1$ cm y el perímetro del rectángulo $ABCD$ es 48 cm, entonces la longitud de $\overline{AE}$ (en cm) es:

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

Resolución

Tema: Relaciones métricas en la circunferencia

Recuerde que



Se cumple

$$\boxed{x^2=ab}$$

Análisis y procedimiento

Piden $AE=x$.

Dato:

$2P_{\square ABCD}=48$

$6R=48$

$R=8$

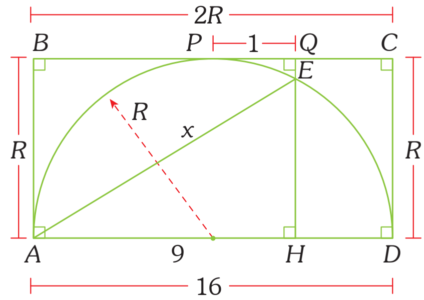
Además,

$PQ=1$ ($\overline{QE} \perp \overline{PQ}$).

Luego

$AH=9$ y $AD=16$.

Por relaciones métricas en la circunferencia



$x^2=(AD)(AM)$

$x^2=(16)(9)$

$\therefore\ x=12$

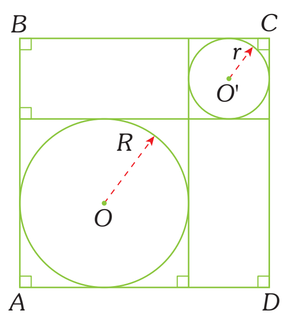
Respuesta

12

PREGUNTA N.° 32

En la figura mostrada, se tiene que el perímetro del cuadrado $ABCD$ es igual al producto de las longitudes de las circunferencias de centro O y O'.

Calcule $\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}$.



A) $\dfrac{\pi^2}{3}$ B) $\dfrac{\pi^2}{2}$ C) $\dfrac{2\pi^2}{3}$

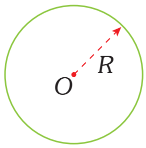
D) $\dfrac{3\pi^2}{4}$ E) π^2

Resolución

Tema: Longitud de la circunferencia

Recuerde que

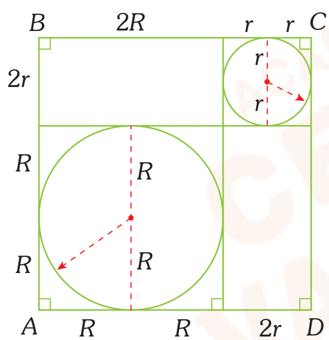
Longitud de la circunferencia: L_O



$$\boxed{L_O=2\pi R}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden $\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}$



Dato:

$$2P_{\square ABCD}=(L_O)\cdot(L_{O'})$$

$$4(2R+2r)=(2\pi R)(2\pi r)$$

De allí

$$R+r=\frac{\pi^2}{2}R\cdot r$$

$$\therefore\quad \frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{\pi^2}{2}$$

Respuesta

$\dfrac{\pi^2}{2}$

PREGUNTA N.° 33

Si $x\in\langle-\infty,\ 0\rangle$, entonces el rango de la función $f_{(x)}=\dfrac{5\pi}{|\text{arc tan}\,x|+2|\text{arc cot}\,x|}$, *es:*

A) $\langle 0,\ 1\rangle$ B) $\langle 1,\ 2\rangle$ C) $\langle 0,\ 2\rangle$
D) $\langle 2,\ 5\rangle$ E) $\langle 5,\ +\infty\rangle$

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas inversas

- $\arctan x+\text{arccot}x=\dfrac{\pi}{2};\ x\in\mathbb{R}$

Análisis y procedimiento

$x<0$, entonces

$$|\text{arc tan}x|=-\text{arc tan}x$$

$$|\text{arc cot}x|=\text{arc cot}x$$

Reemplazamos y reducimos $f_{(x)}$.

$$f_{(x)}=\frac{5\pi}{|\text{arctan}\,x|+2|\text{arc cot}\,x}$$

$$f_{(x)}=\frac{5\pi}{-\text{arctan}\,x+2\text{arc cot}\,x}$$

$$f_{(x)}=\frac{5\pi}{-\left(\dfrac{\pi}{2}-\text{arctan}x\right)+2\text{arc cot}\,x}$$

$$f_{(x)}=\frac{5\pi}{3\text{arc cot}\,x-\dfrac{\pi}{2}}$$

Cuando $-\infty<x<0$, se forma la función $f_{(x)}$.

$$\frac{\pi}{2}<\text{arc cot}\,x<\pi$$

$$\pi<3\text{arc cot}\,x-\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{2}$$

$$5>\frac{5\pi}{3\text{arc cot}\,x-\dfrac{\pi}{2}}>2$$

Entonces

$$5 > f_{(x)} > 2$$

$$\therefore \quad f_{(x)} \in \langle 2; 5 \rangle$$

Respuesta

$\langle 2, 5 \rangle$

PREGUNTA N.º 34

Si $i=\sqrt{-1}$ y $\dfrac{(1+i)^{20}+(1-i)^{20}}{(1+i)^{40}}=\dfrac{1}{A}$, entonces $(A+500)$ es igual a:

A) –12 B) –10 C) –8
D) 10 E) 12

Resolución

Tema: Números complejos

Recuerde que

$$(1+i)^4=-4$$
$$(1-i)^4=-4$$

Análisis y procedimiento

$$\frac{1}{A}=\frac{(1+i)^{20}+(1-i)^{20}}{(1+i)^{40}}$$

$$=\frac{\left((1+i)^4\right)^5+\left((1-i)^4\right)^5}{\left((1+i)^4\right)^{10}}$$

$$=\frac{(-4)^5+(-4)^5}{(-4)^{10}}$$

$$=\frac{-2(4)^5}{(4)^{10}}$$

$$=-\frac{1}{512}$$

$$\rightarrow \quad A=-512$$

$$\therefore \quad (A+500)=-12$$

Respuesta

–12

PREGUNTA N.º 35

De un disco de cartulina de radio 6 cm, se corta un sector circular de ángulo central $\theta=120°$. Con la parte restante, uniendo los bordes se forma un cono. Determine el coseno del ángulo en el vértice del cono construido.

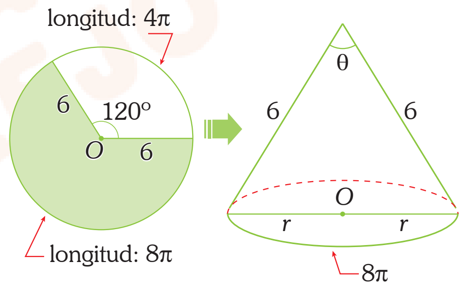
A) 0 B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{1}{9}$

Resolución

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos

Análisis y procedimiento



Del cono formado se obtiene

$$2\pi r=8\pi \;\rightarrow\; r=4$$

También

$$(2r)^2=6^2+6^2-2(6)(6)\cos\theta$$

$$64=72-72\cos\theta$$

$$\rightarrow \quad 72\cos\theta=8$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{1}{9}$$

Respuesta

$\dfrac{1}{9}$

PREGUNTA N.° 36

Halle el valor de $E=\dfrac{-3\tan 840^{\circ}-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(750^{\circ})+1,5}$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) 2

Resolución

Tema: Reducción al primer cuadrante

Análisis y procedimiento

$$E=\frac{-3\tan 840^{\circ}-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}750^{\circ}+1,5}$$

$$E=\frac{-3\tan(720^{\circ}+120^{\circ})-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(720^{\circ}+30^{\circ})+1,5}$$

$$E=\frac{-3\tan 120^{\circ}-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}30^{\circ}+1,5}$$

$$E=\frac{-3\tan(180^{\circ}-60^{\circ})-2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$E=\frac{-3(-\tan 60^{\circ})-2\sqrt{3}}{2}$$

$$E=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}$$

$$E=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Respuesta

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

PREGUNTA N.° 37

Calcule el valor aproximado de:
$E=\operatorname{ctg}(4^{\circ})-7$.

A) 7,07 B) 8,07 C) 9,07

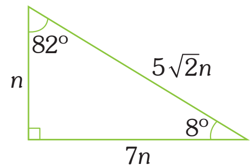
D) 10,1 E) 11,2

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas de arcos múltiples

- $\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x+\cot x$

- Triángulo rectángulo de 8° y 82°



Análisis y procedimiento

$E=\cot(4^{\circ})-7$

$E=\csc 8^{\circ}+\cot 8^{\circ}-7$

$E=5\sqrt{2}+7-7$

$E=5\sqrt{2}$

$E=5(1,4142)$

$E=7,071$

$E=7,07$

Respuesta

7,07

PREGUNTA N.° 38

Si $\tan^2\alpha=2\tan^2x+1$, halle el valor de $y=\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2x$.

A) $\operatorname{sen}^2\alpha$

B) $\cos^2\alpha$

C) $1+\operatorname{sen}^2\alpha$

D) $\tan^2\alpha$

E) $1+\cos^2\alpha$

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas fundamentales

- $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$
- $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$
- $\text{sen}^2\theta=1-\cos^2\theta$

Análisis y procedimiento

$$\tan^2\alpha=2\tan^2x+1$$
$$1+\tan^2\alpha=2(\tan^2x+1)$$
$$\sec^2\alpha=2\sec^2x$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2x}$$
$$\cos^2x=2\cos^2\alpha$$

Nos piden

$$y=\cos^2\alpha+\text{sen}^2x$$
$$y=\cos^2\alpha+1-\cos^2x$$
$$y=\cos^2\alpha+1-(2\cos^2\alpha)$$
$$y=1-\cos^2\alpha$$
$$y=\text{sen}^2\alpha$$

Respuesta

$\text{sen}^2\alpha$

PREGUNTA N.° 39

Un águila se encuentra a una altura H y ve a una liebre de altura h. Se lanza sobre la presa a lo largo del tramo de la trayectoria descrita por la gráfica de la función $f_{(x)}=\dfrac{1}{x-1}$, $x>1$, llegando a su presa. Determine la tangente del ángulo de depresión con el cual el águila vio al inicio a su presa.

A) $\dfrac{1}{h}$ B) hH C) $\dfrac{H}{h}$

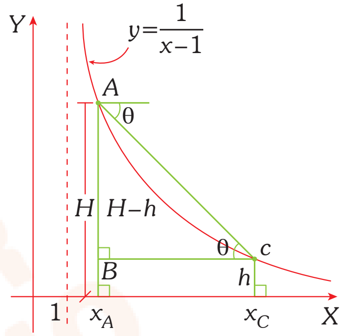
D) $\dfrac{H-h}{h}$ E) $\dfrac{H-h}{H+h}$

Resolución

Tema: Ángulos verticales

Análisis y procedimiento

Graficamos la trayectoria del águila y señalamos los datos.



En los puntos A y C

$$y=\frac{1}{x-1}\ \rightarrow\ x=\frac{1}{y}+1$$

Las abscisas son

$$x_A=\frac{1}{H}+1$$
$$x_C=\frac{1}{h}+1$$

En el $\triangle ABC$

$$\tan\theta=\frac{H-h}{x_C-x_A}$$
$$=\frac{H-h}{\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{H}}$$

$\therefore\ \tan\theta=H\cdot h$

Respuesta

hH

PREGUNTA N.° 40

En la función: $y(t)=2\cos 2t+4\sqrt{2}\,\text{sen}\,2t$; la amplitud y el periodo son respectivamente:

A) $4\sqrt{2}$ y π
B) $4\sqrt{2}$ y 2π
C) 6 y π
D) 6 y 2π
E) $2+4\sqrt{2}$ y π

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas directas

Sea $f_{(x)}=A\text{sen}(Bx+C)$
entonces

- el periodo (T) será $T=\dfrac{2\pi}{|B|}$.
- la amplitud será $|A|$.

Análisis y procedimiento

$$y(t)=2\cos 2t+4\sqrt{2}\,\text{sen}\,2t$$

$$y(t)=6\left(\frac{2}{6}\cos 2t+\frac{4\sqrt{2}}{6}\text{sen}\,2t\right)$$

$$y(t)=6(\text{sen}\theta\cos 2t+\cos\theta\,\text{sen}2t) \qquad \text{(I)}$$

donde $\text{sen}\,\theta=\dfrac{2}{6}$ y $\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}$

De (I)

$$y(t)=6\text{sen}(2t+\theta)$$

Por lo tanto, la amplitud será 6 y el periodo será π.

Respuesta

6 y π