PARTE I

Pregunta N.° 1

Sea A una matriz cuadrada de orden 2×2, si se sabe que su determinante es Δ y la traza de la matriz A^2 es T. Determine el valor [traza $(A)]^2$.

A) $T+\Delta$
B) $T^2+2\Delta$
C) $2\Delta+T$
D) $\Delta+2T$
E) Δ^2+2T

Resolución

Tema: Matrices y determinantes

Recuerde que

si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces

$\mathrm{Tr}(A)=a+d \quad \wedge \quad \det(A)=ad-bc$

Análisis y procedimiento

Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz de orden 2×2.

Por dato

$\underbrace{\det(A)}=\Delta$
$ad-bc=\Delta$

$\underbrace{\mathrm{Tr}(A^2)}=T$; $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$
$a^2+2bc+d^2=T$

Nos piden

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Tr}(A)]^2 &= [a+d]^2 \\
&= \underbrace{a^2+d^2}+2ad \\
&= T-2bc+2ad \\
&= T+2(ad-bc) \\
&= T+2\Delta
\end{aligned}
$$

Respuesta

$2\Delta+T$

Pregunta N.° 2

Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x)\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, y sea $a\in\mathbb{R}$.
Si f satisface:
$|a-2|(f(x))^2-a^2f(x)\leq|f(x)|$ para todo $x\in\mathbb{R}$.
Determine el conjunto de todos los valores de a que garantizan que la función f sea acotada.

A) $\{2\}$
B) $\{4\}$
C) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
D) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$
E) $\mathbb{R}$

Resolución

Tema: Funciones

Recuerde que si $f_{(x)}\neq 0$

entonces $|f_{(x)}|=\begin{cases} f_{(x)}; & f_{(x)}>0 \\ -f_{(x)}; & f_{(x)}<0 \end{cases}$

Análisis y procedimiento

En la desigualdad

$|a-2|[f_{(x)}]^2-a^2\cdot f_{(x)} \leq |f_{(x)}|;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

tenemos que analizar 2 casos

I. $f_{(x)} > 0$: $|a-2|f_{(x)}^2-a^2\cdot f_{(x)} \leq f_{(x)}$

$$\cancel{f}_{(x)}(|a-2|f_{(x)}-a^2) \leq \cancel{f}_{(x)}$$

$$|a-2|f_{(x)}-a^2 \leq 1$$

$$|a-2|f_{(x)} \leq a^2+1$$

$$\rightarrow\ 0 < f_{(x)} \leq \frac{a^2+1}{|a-2|}$$

Nótese que $f_{(x)}$ es acotada $\forall\ a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

II. $f_{(x)} < 0$: $|a-2|f_{(x)}^2-a^2\cdot f(x) \leq -f_{(x)}$

$$\underbrace{\cancel{f}_{(x)}}_{-}(|a-2|f_{(x)}-a^2) \leq -\underbrace{\cancel{f}_{(x)}}_{-}$$

$$|a-2|f_{(x)}-a^2 \geq -1$$

$$|a-2|f_{(x)} \geq a^2-1$$

$$\rightarrow\ \frac{a^2-1}{|a-2|} \leq f_{(x)} < 0$$

Nótese que para que $f_{(x)}$ sea acotada debe cumplirse que $a^2-1 < 0\ \wedge\ a\neq 2$.

$a^2 < 1; a\neq 2\ \rightarrow\ |a| < 1;\ a\neq 2$

$-1 < a < 1\ \wedge\ a\neq 2$

$\rightarrow\ -1 < a < 1$

Luego, en este caso, $f_{(x)}$ es acotada $\forall\ a \in \langle -1; 1\rangle$

Finalmente $f_{(x)}$ es acotada $\forall\ x \in \mathbb{R}$ si

$a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\ \vee\ a \in \langle -1; 1\rangle$

$\therefore\ a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Respuesta

$\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Pregunta N.° 3

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$ tales que $0 < b < 1$ y $a < c$, determine los valores de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones señalando la alternativa correcta:

I. $b^a > b^c$

II. $\log_b(a) > c$, si $a > b^c$

III. $\log_b(a) > \log_b(c)$

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FFV
E) FVF

Resolución

Tema: Inecuación logarítmica - exponencial

Recuerde que para $0 < b < 1$

$b^x > b^y \leftrightarrow x < y$

$\log_b x > \log_b y \leftrightarrow 0 < x < y$

Análisis y procedimiento

Tenemos que $0 < b < 1$ y $a < c$.

Luego

I. **Verdadero**

Como $a < c \rightarrow b^a > b^c$

II. **Falso**

Si $a > b^c$ $\qquad \log_b a < \log_b(b^c)$

$\qquad \log_b a < c$

III. **Verdadero**

Como $a < c\ \rightarrow\ \log_b a > \log_b c$

Observación

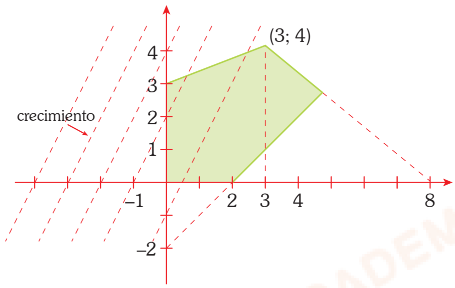
a y c son positivos.

Respuesta

VFV

Pregunta N.° 4

La región admisible S y el crecimiento de la función objetivo del problema,
maximizar $f(x, y)$
s.a. $(x, y) \in S$
se muestra en la siguiente figura:



Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es la solución del problema, determine $f(\bar{x}, \bar{y})$.

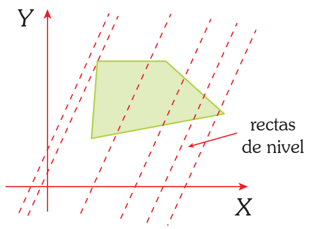
A) $\dfrac{10}{3}$ B) $\dfrac{14}{3}$ C) $\dfrac{20}{3}$

D) $\dfrac{25}{3}$ E) $\dfrac{28}{3}$

Resolución

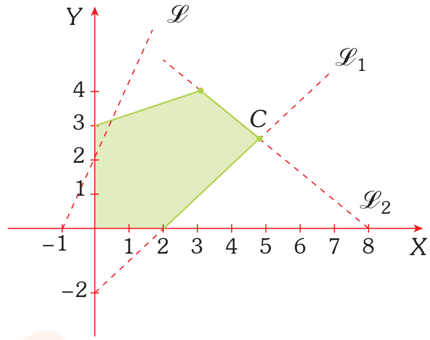
Tema: Programación lineal

Recuerde el método gráfico (rectas de nivel) para maximizar o minimizar $f(x; y)=ax+by$.



Análisis y procedimiento

De la figura



Sea $\mathscr{L}$: $y=mx+k$

Como $(-1; 0) \in \mathscr{L} \rightarrow 0=-m+k$
$(0; 2) \in \mathscr{L} \rightarrow 2=0+k$

Luego $\mathscr{L}$: $y=2x+2$

Sea $\mathscr{L}_1$: $y=ax+b$

Como $(0; -2) \in \mathscr{L}_1 \rightarrow -2=b$
$(2; 0) \in \mathscr{L}_1 \rightarrow 0=2a+b$

Luego $\mathscr{L}_1$: $y=x-2$

Sea $\mathscr{L}_2$: $y=ax+b$

Como $(3; 4) \in \mathscr{L}_2 \quad 4=3a+b$
$(8; 0) \in \mathscr{L}_2 \rightarrow 0=8a+b$

Luego $\mathscr{L}_2 : y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{32}{5}$

Ahora hallamos C.

De $x-2=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{32}{5}$

$$x=\frac{14}{3};\ y=\frac{8}{3}$$

Luego $C=\left(\dfrac{14}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Sea la función objetivo
$f(x;\, y)=ax+by$

Aplicando el método de las rectas de nivel, entonces $ax+by=k$.

Esta recta debe ser paralela a la recta $\mathscr{L}$: $y=2x+2$, es decir, $2x-y=-2$.

De ahí se deduce que $f(x;\, y)=2x-y$.

Nos piden Máx $f(x;\, y)$.

Evaluamos en los vértices de la región factible.

$f(0;\, 0)=0$

$f(0;\, 3)=-3$

$f(3;\, 4)=2$

$f\left(\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)=\frac{20}{3}$

$f(2;\, 0)=4$

$\therefore$ Máx $f(x;\, y)=\frac{20}{3}$

Respuesta

$\frac{20}{3}$

Pregunta N.° 5

El conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z es $\left\{(x, y, z)\Big/\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}\right\}$.

Si el punto (3, –2, 5) pertenece al plano cuya ecuación lineal es una de las ecuaciones del sistema, y tiene la forma $ax+by+cz=15$. Determine dicha ecuación.

A) $23x+y-11z=15$
B) $-23x-y+22z=11$
C) $-23x+13y+22z=15$
D) $23x-22y-z=-11$
E) $-23x+22y+11z=10$

Resolución

Tema: Sistemas de ecuaciones

Recuerde que si $(x_0;\, y_0;\, z_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ mx+ny+pz=q \end{cases}$$

entonces satisface todas las ecuaciones a la vez.

Análisis y procedimiento

Por dato

$$\left\{(x;\, y;\, z)\Big/\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}\right\} \qquad \text{(I)}$$

es el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=15 \\ a_1x+b_1y+c_1z=d \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

De (I)

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}=k \rightarrow \begin{cases} x=4k+2 \\ y=2k+3\ ;\ k\in\mathbb{R} \\ z=3k+1 \end{cases}$$

si $k=0$, una solución es (2; 3; 1)
si $k=-1$, otra solución es (–2; 1; –2)
Además, (3; –2; 5) satisface (II).

Reemplazando las 3 ternas ordenadas en (II), se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2a+3b+c=15 \\ -2a+b-2c=15 \\ 3a-2b+5c=15 \end{cases}$$

de donde

$a=-23$
$b=13$
$c=22$

Luego, la ecuación (II) es

$-23x+13y+22y=15$

Respuesta

$-23x+13y+22z=15$

Pregunta N.° 6

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Diga cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

I. Si para algún $k \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_ib_i| = 0$, entonces

$a_i=0 \ \ \forall\, i \in \{1, ..., k\}$ o $b_i=0, \forall\, i \in \{1, ..., k\}$

II. Si para algún $k \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| = 0$, entonces

$\sum\limits_{i=1}^{k} |a_ib_i| = 0$

III. Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq M$ y $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i| \leq M$, entonces

$\sum\limits_{i=1}^{k} |a_ib_i| \leq M^2, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$

A) Solo II
B) Solo III
C) I y II
D) II y III
E) I, II y III

Resolución

Tema: Sumatorias y series

Recuerde que

$|a| + |b| = 0 \quad \leftrightarrow \quad a=0 \wedge b=0$

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**

Consideramos las sucesiones

$\{a_i\} = \{1; 0; 1; 0; 1; 0; ...\}$, algunos $a_i \neq 0$

$\{b_i\} = \{0; 1; 0; 1; 0; ...\}$, algunos $b_i \neq 0$

entonces

$\{a_ib_i\} = \{0; 0; 0; 0; 0; 0; ...\}$

Es decir

si $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_ib_i| = 0$, entonces

no necesariamente

$a_i=0; \forall\, i \in \{1; ...; k\}$ o $b_i=0; \forall\, i \in \{1; ...; k\}$

II. **Verdadera**

Como $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| = 0$, entonces $|a_i| = 0; \ \forall\, i$

es decir $a_i=0; \ \forall\, i$

Luego

$$\sum_{i=1}^{k} |a_ib_i| = \sum_{i=1}^{k} |0 \cdot b_i| = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0$$

III. **Verdadera**

Como

$\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i| \leq M$, en particular

$\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i| \leq M$, en particular

Además, se sabe que

$$|a_1||b_1| + |a_2||b_2| + ... + |a_k||b_k| \leq \underbrace{(|a_1| + |a_2| + ... + |a_k|)}_{\leq M} \cdot \underbrace{(|b_1| + |b_2| + ... + |b_k|)}_{\leq M}$$

$$\sum_{i=1}^{k} |a_ib_i| \leq M^2$$

Respuesta

II y III

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Pregunta N.° 7

Sea $S_n(x)=x+x^2+...+x^n$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

Determine el valor de $S_n\left(\frac{3}{2}\right)-S_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

A) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+4$

B) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$

C) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+4$

D) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$

E) $3\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^n+4$

Resolución

Tema: Sumatorias

Recuerde que

$$1+x+x^2+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$S_n(x)=x+x^2+x^3+...+x^n,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

Ahora $S_n(x)=\underbrace{1+x+x^2+...+x^n}-1$

$$S_n(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}-1 \qquad \text{(I)}$$

En (I) para $x=\frac{3}{2}$

$$S_n\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}}-1$$

$$=2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n-2-1$$

$$=3\left(\frac{3}{2}\right)^n-3$$

En (I) para $x=\frac{1}{2}$

$$S_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{-\frac{1}{2}}-1$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2-1$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

Piden

$$S_n\left(\frac{3}{2}\right)-S_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Es decir

$$3\left(\frac{3}{2}\right)^n-3-\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right]$$

$$3\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$$

Respuesta

$3\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$

Pregunta N.° 8

Sean f, g y h funciones reales de variable real.
Dadas las siguientes proposiciones:

I. $ho(f+g)=hof+hog$

II. Si Dom(f)=Dom(g)=$\mathbb{R}$, entonces Dom(fog)=$\mathbb{R}$

III. $(fog)oh=fo(goh)$

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FVF

E) FFF

Resolución

Tema: Funciones

Sean f; g; h funciones reales de variable real.
Consideremos que las siguientes composiciones existen.

$ho(f+g)$; hof; hog; fog; $(fog)oh$ y $fo(goh)$

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**

Pues si $h_{(x)}=x^2$; $f_{(x)}=x$ y $g_{(x)}=1$, entonces

- $ho(f+g)_{(x)}=h_{(f_{(x)}+g_{(x)})}=h_{(x+1)}=(x+1)^2$
- $(hof)_{(x)}=h_{(f_{(x)})}=h_{(x)}=x^2$
- $(hog)_{(x)}=h_{(g_{(x)})}=h_{(1)}=1^2$

Luego

$ho(f+g)\neq hof+hog$

II. **Verdadera**

En efecto, tenemos Dom$f$=Dom$g$=$\mathbb{R}$.

Hallamos Dom(fog).

$\{x\in \text{Dom}g/g_{(x)}\in \text{Dom}f\}$

$\rightarrow\ x\in\mathbb{R}\wedge g_{(x)}\in\mathbb{R}$

$(x\in\mathbb{R}\wedge x\in\mathbb{R})\ \rightarrow\ x\in\mathbb{R}$

$\therefore\ \text{Dom}(fog)=\mathbb{R}$

III. **Verdadera**

En efecto, vamos a demostrar que $(fog)oh$ y $fo(goh)$ tienen la misma regla de correspondencia y sus dominios son iguales.

Dominio

$$\text{Dom}(fog)oh=\{x\in\text{Dom}(h)\wedge h_{(x)}\in\text{Dom}(fog)\}$$

$$=\{x\in\text{Dom}(h)\wedge h_{(x)}\in\text{Dom}(g)\wedge g_{(h_{(x)})}\in\text{Dom}(f)\}$$

$$=\{x\in\text{Dom}(goh)\wedge g_{(h_{(x)})}\in\text{Dom}(f)\}$$

$$=\{x\in\text{Dom}(goh)\wedge (goh)_{(x)}\in\text{Dom}(f)\}$$

$$=\text{Dom}[fo(goh)]$$

Regla de correspondencia

$$[(fog)oh]_{(x)}=(fog)_{(h_{(x)})}$$

$$=f_{(g_{(h_{(x)})})}$$

$$=f_{((goh)_{(x)})}$$

$$=[fo(goh)]_{(x)}$$

Respuesta

FVV

Pregunta N.° 9

Un número de cuatro cifras en base 7 se representa en base decimal por $\overline{49d}$. Calcule el valor máximo de la suma de las cifras de dicho número.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución

Tema: Numeración

Análisis y procedimiento

Del enunciado del problema, debemos hacer cumplir que $\overline{mnpq}_7=\overline{49d}$.

Luego hallamos el máximo valor de $(m+n+p+q)$.

De la igualdad se observa que el numeral $\overline{49d}$ asume 10 valores.

Este numeral puede ser como mínimo 490 y como máximo 499.

$$\overline{mnpq}_7=\boxed{\overline{49d}}$$

Entonces deducimos que

$$490\leq \overline{49d} \leq 499$$
$$1300_7\leq \overline{mnpq}_7\leq 1312_7$$

pasando a base 7 todos los números

De la desigualdad tenemos todos los posibles valores de $\overline{mnpq}_7$

$$\overline{mnpq}_7\in\{1300_7; 1301_7; 1302_7; 1303_7; 1304_7; 1305_7; 1306_7; 1310_7; 1311_7; 1312_7\}$$

Como queremos hallar el máximo valor de $(m+n+p+q)$, este se dará en el numeral 1306_7, dado que $(m+n+p+q)=10$.

Respuesta

10

Pregunta N.° 10

Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que $n+m$ y $n-m$ son los menores cuadrados perfectos distintos.
Si $n=2m+1$, calcule el valor de $3m-n$.

A) –1 B) 0 C) 1
D) 4 E) 7

Resolución

Tema: Potenciación

Análisis y procedimiento

Por dato tenemos que

- $n+m=P^2$ (menor posible)
- $n-m=Q^2$ (menor posible)
- $n=2m+1$

$(P^2\neq Q^2)$

Reemplazamos el tercer dato en los otros dos datos.

- $(2m+1)+m=P^2$

$$\boxed{3m+1=P^2}$$

$P^2=\overset{o}{3}+1$
$P=\overset{o}{3}\pm 1$
$\to$ 1; 2; 4; 5; ...

- $(2m+1)-m=Q^2$

$$\boxed{m+1=Q^2}$$

Si $P=1$, entonces $m=0$ y $Q=1$; pero como $P^2\neq Q^2$, no es solución.
Si $P=5$, entonces $m=8$ y $Q=3$; cumple con los cuadrados perfectos.
Entonces $m=8$ y $n=2m+1=17$.
Por dato, $3m-n=7$.

Respuesta

7

Pregunta N.° 11

Jorge decide montar un gimnasio y utiliza 5000 nuevos soles para comprar 40 aparatos entre bicicletas, colchonetas y máquinas de remo. Si los precios unitarios son 150; 80; 300 nuevos soles respectivamente, ¿cuántos aparatos entre bicicletas y máquinas de remo compra?

A) 15 B) 16 C) 20
D) 24 E) 25

Resolución

Tema: Divisibilidad

Análisis y procedimiento

Del problema tenemos

	Cantidad	Precio unitario
Bicicletas	a	S/.150
Colchones	b	S/.80
Máquinas de remo	c	S/.300

Donde debe cumplirse que

- $a+b+c=40$ (I)
- $150a+80b+300c=5000$

  $15a+8b+30c=500$ (II)

Realizamos (II)–8(I)

$$\begin{array}{r} 15a+8b+30c=500 \\ \underline{8a+8b+8c=320} \\ 7a+22c=180 \end{array} \quad (-) \quad \text{(III)}$$

De la ecuación (III) obtenida, resolvemos

$7a+22c=180$ $(c<9)$

$$\overset{\circ}{7}+\left(\overset{\circ}{7}+1\right)c=\overset{\circ}{7}+5$$

$$c=\overset{\circ}{7}+5$$

$$\boxed{c=5}$$

Reemplazando el valor de c en (III)

$7a+22(5)=180$

$$\boxed{a=10}$$

Finalmente, tenemos que $c=5$; $a=10$; $b=25$.

Entonces, la cantidad de aparatos entre bicicletas (a) y máquinas (c) que compra es $a+c=15$.

Respuesta

15

Pregunta N.° 12

Se tienen las siguientes afirmaciones:

I. Dos enteros no nulos a y b son primos entre sí, si y solo si existen enteros m y n tal que $ma+nb=1$.

II. Sean a y b dos enteros positivos, entonces a y $(ab+1)$ son primos entre sí.

III. Si a y b son primos entre sí, entonces ab y (a^n+b^m) son primos entre sí, donde m y n son enteros positivos.

¿Cuál de las alternativas es la correcta?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

RESOLUCIÓN

Tema: Clasificación de los $\mathbb{Z}^+$; MCD

- Si a y b son PESI $\rightarrow$ MCD(a; b)=1.
- $\begin{array}{c|l} A & B \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$ $\rightarrow$ MCD(A; B)=MCD(B; r)

Análisis y procedimiento

I. **Correcta**

Si MCD(A; B)=d

d=mA+nB; d es combinación lineal de A y B
m; $n \in \mathbb{Z}$

Ejemplo

MCD(12; 18)= 6 $\rightarrow$ $6=\underbrace{5(12)+(-3)18}_{\text{combinación lineal}}$

Del enunciado, a y b son PESI.

MCD(a; b)=1

$\rightarrow$ 1=ma+nb; m; $n \in \mathbb{Z}$

II. **Correcta**

Debemos demostrar que MCD(a; ab+1)=1.

Tenemos $\begin{array}{c|l} ab+1 & a \\ \cline{2-2} 1 & b \end{array}$

$\rightarrow$ MCD(ab+1; a)= MCD$(\underbrace{a;1}_{\text{PESI}})$=1

III. **Correcta**

Por contradicción

Supongamos que ab y a^n+b^m no son PESI, entonces deben tener por lo menos un divisor primo común.

Sea d dicho divisor primo.

$ab=\overset{\circ}{d}$

Si d divide a a, pero no divide a b (ya que a y b son PESI)

$\rightarrow$ $a^n=\overset{\circ}{d}$; $b^m \neq \overset{\circ}{d}$

$\therefore$ $a^n+b^m \neq \overset{\circ}{d}$

Como no existe dicho divisor primo d entonces, ab y (a^n+b^m) son PESI

Respuesta

I, II y III

Pregunta N.º 13

Halle la suma de los siguientes números:

$$n_1=1{,}3125,\ n_2=\frac{21}{16},\ n_3=1{,}\widehat{36}$$

$$n_4=1+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{5}{10^4}$$

A) $\frac{322}{111}$ B) $\frac{647}{113}$ C) $\frac{787}{147}$

D) $\frac{933}{176}$ E) $\frac{987}{181}$

RESOLUCIÓN

Tema: Números decimales

- Descomposición polinómica de un decimal
$$a,\overline{bcd}=a+\frac{b}{10}+\frac{c}{10^2}+\frac{d}{10^3}$$
- Fracción generatriz
$$a,\overline{bcd}=\frac{\overline{abcd}}{1000}$$
$$a,\widehat{bc}=\frac{\overline{abc}-a}{99}$$

Análisis y procedimiento

Por dato

- $n_1=1{,}3125=\frac{13\,125}{10\,000}=\frac{21}{16}$

- $n_2=\dfrac{21}{16}$

- $n_3=1,\overparen{36}=\dfrac{136-1}{99}=\dfrac{15}{11}$

- $n_4=\underbrace{1+\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{2}{10^3}+\dfrac{5}{10^4}}_{\text{descomposición polinómica}}=1,3125=\dfrac{21}{16}$

Luego

$$n_1+n_2+n_3+n_4=\frac{21}{16}+\frac{21}{16}+\frac{15}{11}+\frac{21}{16}$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4=\frac{63}{16}+\frac{15}{11}=\frac{933}{176}$$

$$\therefore\ n_1+n_2+n_3+n_4=\frac{933}{176}$$

Respuesta

$\dfrac{933}{176}$

Pregunta N.° 14

Si N y M son dos números enteros de tres cifras de manera que el primero más sus dos quintas partes es un cubo perfecto, al segundo se le suma su mitad para formar un cuadrado perfecto y además $M+N<500$. Entonces el mayor valor de $M+N$ es

A) 315
B) 361
C) 395
D) 461
E) 495

Resolución

Tema: Potenciación

Análisis y procedimiento

Del enunciado

Para el primer número (N)

$$K^3=N+\frac{2}{5}N=\frac{7}{5}N$$

$$\rightarrow\ K^3=\frac{7}{5}\times\overbrace{\left(5\times 7^2\times t^3\right)}^{N}$$

$$\therefore\ N=245\times t^3 \qquad \text{(I)}$$

Para el segundo número (M)

$$P^2=M+\frac{M}{2}=\frac{3}{2}M$$

$$\rightarrow\ P^2=\frac{3}{2}\overbrace{\left(2\times 3\times q^2\right)}^{M}$$

$$\therefore\ M=6q^2 \qquad \text{(II)}$$

Por dato

$$M+N<500$$

$$6q^2+245\underset{\substack{\downarrow\\ 1\ (\text{único})}}{t^3}<500$$

$$6q^2+245<500$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \underbrace{6}_{\text{máx}}}}{q}<6,51...$$

$$\therefore\ (M+N)_{\text{máximo}}=6(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{máx}}}{6^2})+245=461$$

Respuesta

461

Pregunta N.° 15

Un producto se vende al mismo precio en dos tiendas.

a. En la tienda X, se hacen descuentos sucesivos, primero del 15%, luego del 15% y finalmente del 20%.

b. En la tienda Y se hacen descuentos sucesivos del 10% y luego del 40%.

El dueño desea vender el producto en ambas tiendas al mayor precio.

Determine la tienda en la que se debe incrementar el precio y en cuánto. Dar la respuesta más próxima.

A) X; 7,03% B) X; 7,04% C) Y; 7,03%
D) Y; 7,04% E) Y; 7,40%

Resolución

Tema: Tanto por ciento

Tenga en cuenta que

$$P_c \xrightarrow{G} \underbrace{P_v \xrightarrow{D} P_f}_{P_v = P_f - D}$$

$$80\% \times 70\% N \xleftarrow{\text{descuentos sucesivos del 20\% y 30\%}} N$$

Análisis y procedimiento

Tienda X

(I)

$$\underbrace{80\% \times 85\% \times P_{f_1}}_{P_v} \xleftarrow{\text{descuentos sucesivos 15\%, 15\% y 20\%}} P_{f_1}$$

Tienda Y

(II)

$$\underbrace{90\% \times 60\% \times P_{f_2}}_{P_v} \xleftarrow{\text{descuentos sucesivos 10\% y 20\%}} P_{f_2}$$

Por dato, el producto se vende al mismo precio; entonces de (I) y (II)

$$80\% \times 85\% \times 85\% P_{f_1} = 90\% \times 60\% P_{f_2}$$

$$\frac{P_{f_1}}{P_{f_2}} = \frac{270}{289}$$

Observe que el mayor precio es 289, entonces la tienda X debe incrementar su precio en 19(289–270=19), cuyo tanto por ciento es 7,04%

$$\left(\frac{19}{270} \times 100\% = 7{,}04\%\right).$$

Respuesta

X; 7,04%

Pregunta N.° 16

En un experimento se obtuvieron n datos a_1, a_2, ..., a_n.

Una persona calcula el promedio M_1 sobre los n datos obtenidos, una segunda persona observa que en el caso anterior olvidaron sumar el dato a_i y vuelve a calcular el promedio M_2 sobre los datos obtenidos; pero una tercera persona nota que esta segunda persona olvidó sumar en esta ocasión el dato a_k; si además se sabe que $a_i + a_k = N$. Determine el verdadero promedio.

A) $\dfrac{n(M_1 - M_2) + N}{2n}$

B) $\dfrac{n(M_2 - M_1) + N}{2n}$

C) $\dfrac{n(M_1 + M_2) - N}{2n}$

D) $\dfrac{n(M_1 - M_2) - N}{2n}$

E) $\dfrac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Resolución

Tema: Promedios

Análisis y procedimiento

Por dato

$$\underbrace{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n}_{n \text{ datos}} \rightarrow \underbrace{(\text{Promedio})}_{\overline{MA}} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Una persona calcula el promedio (M_1) sobre los n datos y una segunda persona observa que no suma el dato a_i.

$$M_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n - a_i}{n} \qquad \text{(I)}$$

- Se vuelve a calcular el promedio (M_2) sobre los n datos y una tercera persona observa que no suma el dato a_k.

$$M_2 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n - a_k}{n} \qquad \text{(II)}$$

Sumando (I) y (II)

$$M_1 + M_2 = \frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \overbrace{(a_i + a_k)}^{N \text{ (dato)}}}{n}$$

$$M_1 + M_2 = \frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n} - \frac{N}{n}$$

$$M_1 + M_2 = 2 \times \overline{MA} - \frac{N}{n}$$

$$2 \cdot \overline{MA} = M_1 + M_2 + \frac{N}{n}$$

$$2 \cdot \overline{MA} = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{n}$$

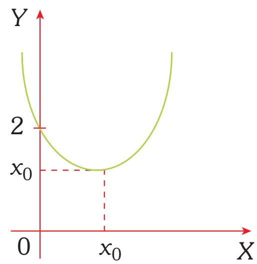
$$\therefore \underbrace{\overline{MA}}_{\text{(verdadero promedio)}} = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$$

Respuesta

$$\frac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$$

Pregunta N.° 17

Dada la gráfica de la función cuadrática f, halle el valor de x_0, sabiendo que f tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno.



A) 1/4 B) 1/2 C) 3/4
D) 1 E) 3/2

Resolución

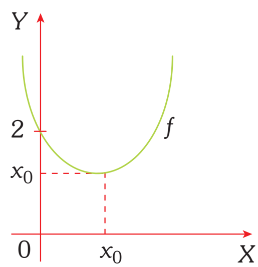
Tema: Funciones

Recuerde que una función cuadrática con coeficiente principal (coeficiente del término de mayor grado) igual a 1, se escribe así: $f_{(x)} = 1(x-h)^2 + k$

Donde $V = (h; k)$, vértice de la gráfica de f.

Análisis y procedimiento

Tenemos



De la gráfica de f se tiene

$$V = (x_0; x_0);\ x_0 > 0 \ \wedge \ f_{(0)} = 2$$

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Entonces

$$f_{(x)}=(x-x_0)^2+x_0$$

$$\rightarrow\ f_{(0)}=x_0^2+x_0=2;\ x_0>0$$

$$\therefore\ \ x_0=1$$

Respuesta

1

Pregunta N.° 18

Halle el cociente al dividir

$P(x)=3x^4+x^3+x^2+x-2$ entre $(x+1)(x-2/3)$

A) $2(x^2-1)$
B) $3(x^2+2x)$
C) $4(x^2+4)$
D) $3(x^2+1)$
E) $3(x^2-2)$

Resolución

Tema: División de polinomios

Datos

Dividendo: $3x^4+x^3+x^2+x-2$

Divisor: $(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

Nos piden el cociente.

Utilizaremos el método de Horner.

Análisis y procedimiento

Sea $P(x)=3x^4+x^3+x^2+x-2$ dividido entre

$$(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)=x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

Aplicando el método de Horner

1	3	1	1	1	–2
$-\frac{1}{3}$		–1	2		
$\frac{2}{3}$			0	0	
				–1	2
	3	0	3	0	0

Por lo tanto, el cociente es $3x^2+3$.

Respuesta

$3(x^2+1)$

Pregunta N.° 19

Sean p, q, r proposiciones lógicas.

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ y $(p\vee q)\rightarrow r$ son verdaderas, entonces r es verdadera.

II. $p\rightarrow q$ y $p\wedge\sim q$ son proposiciones equivalentes.

III. Si $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ y $\sim r\rightarrow q$ son proposiciones falsas, entonces p es verdadera.

A) VVV
B) VVF
C) VFF
D) FVF
E) FFF

Resolución

Tema: Lógica

Tabla de esquemas lógicos

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$
V	V	**V**	V	V
V	F	F	V	**F**
F	V	F	V	V
F	F	F	**F**	V

Análisis y procedimiento

I. Verdadera

$\underbrace{(p \to q)} \to r \equiv \mathrm{V}$

$\underbrace{(\sim p \lor q) \to r}$

$\sim(\sim p \lor q) \lor r$

$(p \land \sim q) \lor r$

$\boxed{\underbrace{(p \lor r)}_{\mathrm{V}}} \land \underbrace{(\sim q \lor r)}_{\mathrm{V}} \equiv \mathrm{V}$

(I)

$\underbrace{(p \lor q)} \to r \equiv \mathrm{V}$

$\sim(p \lor q) \lor r$

$(\sim p \land \sim q) \lor r$

$\boxed{\underbrace{(\sim p \lor r)}_{\mathrm{V}}} \land \underbrace{(\sim q \lor r)}_{\mathrm{V}} \equiv \mathrm{V}$

(II)

De (I) y (II)

$(p \lor r) \equiv \mathrm{V}$ y $(\sim p \lor r) \equiv \mathrm{V}$ $\therefore$ $r \equiv \mathrm{V}$

Se observa que, independientemente del valor de verdad de p, el resultado de r es V para que los esquemas sean V.

II. Falsa

- $p \to q \equiv \sim p \lor q$
- $p \land \sim q$

No son proposiciones equivalentes

III. Falsa

Como el segundo dato tiene menos proporciones simples

$\underbrace{\sim r}_{\mathrm{V}} \to \underset{\mathrm{F}}{\underset{\downarrow}{q}} \equiv \mathrm{F}$ $\quad\to\quad q \equiv \mathrm{F};\ r \equiv \mathrm{F}$

Luego, en el primer dato

$\underbrace{(p \to \underset{\mathrm{F}}{q})}_{\mathrm{V}} \to \underset{\mathrm{F}}{r} \equiv \mathrm{F}$ $\quad\to\quad p \equiv \mathrm{F}$

Respuesta

VFF

Pregunta N.° 20

Considerando $m \neq 0$, halle la suma de las soluciones de la ecuación.

$$\begin{vmatrix} a & m & b \\ a & m & x \\ x & m & b \end{vmatrix} = 0; \text{ con } a,\ b \text{ datos}$$

A) $a-b$

B) $b-a$

C) $a+b$

D) $2a+b$

E) $a+2b$

Resolución

Tema: Determinantes

Datos

$$\begin{vmatrix} a & m & b \\ a & m & x \\ x & m & b \end{vmatrix} = 0;\ m \neq 0$$

Nos piden la suma de las soluciones de la ecuación.

Análisis y procedimiento

Aplicando la regla de Sarrus

$$\left|\begin{matrix} a & m & b \\ a & m & x \\ x & m & b \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & m \\ a & m \\ x & m \end{matrix} = 0$$

Entonces

$$amb + mx^2 + \cancel{abm} - bmx - max - \cancel{abm} = 0$$

$$m(x^2 - bx - ax + ab) = 0$$

$$m(x^2 - (a+b)x + ab) = 0$$

$$m(x-a)(x-b) = 0$$

$$\therefore\ x = a \ \lor\ x = b$$

Respuesta

$a+b$

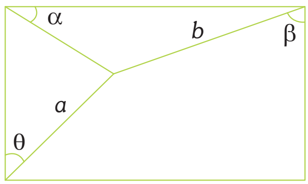
ACADEMIA CESAR VALLEJO

PARTE 2

Pregunta N.° 21

En la figura mostrada, el valor de

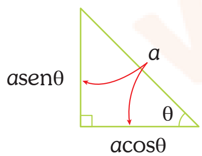
$$E=\frac{a\cdot \text{tg}\,\alpha\cdot \text{sen}\,\theta}{b\cdot\cos\beta}\text{, es:}$$



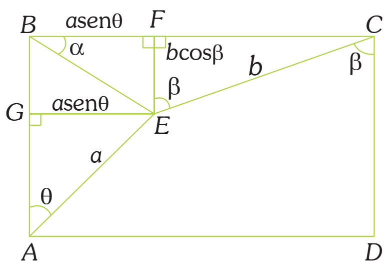
A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución

Tema: Resolución de triángulos rectángulos



Análisis y procedimiento



En el $\triangle BFE$

$$\tan\alpha=\frac{b\cos\beta}{a\,\text{sen}\,\theta}$$

$$a\tan\alpha\,\text{sen}\theta=b\cos\beta$$

$$\frac{a\tan\alpha\,\text{sen}\,\theta}{b\cos\beta}=1$$

$\therefore\ E=1$

Respuesta

1

Pregunta N.° 22

Determine la distancia del punto $\left(\frac{1}{4},4\right)$ a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación: $y+1=2\left(x+\frac{3}{4}\right)$.

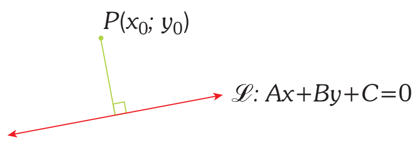
A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

D) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

Resolución

Tema: Geometría analítica

Distancia de un punto a una recta



$$d(P;\mathscr{L})=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Análisis y procedimiento

$$\mathscr{L}: y+1=2\left(x+\frac{3}{4}\right); P\left(\frac{1}{4}; 4\right)$$

Convertimos la recta a su forma general.

$$\mathscr{L}: 4x-2y+1=0; P\left(\frac{1}{4}; 4\right)$$

Hallamos la distancia de un punto a la recta.

$$d(P; \mathscr{L})=\frac{\left|4\left(\frac{1}{4}\right)-2(4)+1\right|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

$$d(P; \mathscr{L})=\frac{|-6|}{\sqrt{20}}=\frac{6}{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad d(P; \mathscr{L})=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Respuesta

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Pregunta N.° 23

Para $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, calcular la variación de $M=\cos^2\alpha-\cos\alpha+2$.

A) $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$

B) $\left[\frac{7}{4}, 3\right]$

C) $\left[\frac{7}{4}, 4\right]$

D) $\left[\frac{9}{4}, 4\right]$

E) $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$

Resolución

Tema: Circunferencia trigonométrica (C.T.)

Análisis y procedimiento

Nos piden la variación de

$$M=\cos^2\alpha-\cos\alpha+2$$

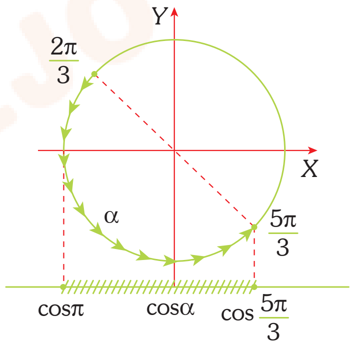
Completamos cuadrados

$$M=\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \qquad \text{(I)}$$

Del dato

$$\frac{2\pi}{3} \le \alpha \le \frac{5\pi}{3}$$

En la C.T.



De la C.T.

$$\cos\pi \le \cos\alpha \le \cos\frac{5\pi}{3}$$

$$-1 \le \cos\alpha \le \frac{1}{2}$$

Formamos la expresión (I)

$$-\frac{3}{2} \le \cos\alpha-\frac{1}{2} \le 0$$

$$\frac{9}{4} \ge \left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$$

$$4 \geq \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

$$\therefore \ \frac{7}{4} \leq M \leq 4$$

Respuesta

$\left[\frac{7}{4}, 4\right]$

Pregunta N.° 24

Si sec$x$=csc2θ–ctg2θ, determine

$$E = \frac{\sec^2\theta - \text{tg}^2 x}{2 - \text{ctg}\,\theta + \cos x}$$

A) –1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$

D) 1 E) $\frac{3}{2}$

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas del arco doble

- $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x - \text{ctg}x$
- $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$

Análisis y procedimiento

De la condición

sec$x$=csc2θ–ctg2θ

sec$x$=tgθ (I)

cos$x$=ctgθ (II)

Nos piden

$$E = \frac{\sec^2\theta - \text{tg}^2 x}{2 - \text{ctg}\,\theta + \cos x}$$

$$E = \frac{1 + \text{tg}^2\theta - \text{tg}^2 x}{2 - \text{ctg}\,\theta + \cos x}$$

Reemplazando (I) y (II) en la expresión

$$E = \frac{1 + \sec^2 x - \text{tg}^2 x}{2 - \cos x + \cos x}$$

$$E = \frac{1+1}{2}$$

$\therefore \ E=1$

Respuesta

1

Pregunta N.° 25

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si arc sen$(-x) = -\frac{\pi}{2}$, entonces $x=1$

II. Si arc cos$(-x)=1$, entonces $x=-\pi$

III. Si $x \in [-1, 1]$, entonces

$$\text{arc sen}(-x) + \text{arc cos}(-x) = \frac{\pi}{2}$$

A) FFV B) VVV C) VVF

D) VFF E) VFV

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas inversas

- Función arco seno: $f_{(x)}$=arcsen$x$

$$\text{Dom}f=[-1; 1] \ ; \ \text{Ran}f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

- Función arco coseno: $f_{(x)}=\text{arc}\cos x$

$$\text{Dom}f=[-1;\ 1]\ \ ;\ \ \text{Ran}f=[0;\ \pi]$$

Propiedad

$$\text{arc}\,\text{sen}x+\text{arc}\cos x=\frac{\pi}{2};\ \ \forall\ x\in[-1;\ 1]$$

Análisis y procedimiento

I. **Verdadero**

Si $\text{arcsen}(-x)=-\dfrac{\pi}{2}$, entonces $x=1$.

Veamos

$$\text{arc sen}(-x)=-\frac{\pi}{2}$$

$$-x=\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\ \to\ -x=-1$$

$\therefore\ \ x=1$

II. **Falso**

Si $\text{arc}\cos(-x)=1$, entonces $x=-\pi$.

Veamos

$$\text{arc}\cos(-x)=1\ \ \to\ \ -x=\cos(1)$$

$\therefore\ \ x=-\cos 1$

III. **Verdadero**

Si $x\in[-1;\ 1]$, entonces

$$\text{arc}\,\text{sen}(-x)+\text{arc}\cos(-x)=\frac{\pi}{2}$$

Veamos

$$x\in[-1;\ 1]\ \ \to\ \ -x\in[-1;\ 1]$$

Por propiedad

$$\text{arc}\,\text{sen}(-x)+\text{arc}\cos(-x)=\frac{\pi}{2}$$

Respuesta

VFV

Pregunta N.º 26

Para $1<x<3$ resolver la siguiente inecuación:
$\text{sen}(\pi x)-\cos(\pi x)<0$

A) $\left\langle 1,\dfrac{5}{4}\right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle \dfrac{5}{4},\dfrac{5}{2}\right\rangle$

D) $\left\langle \dfrac{9}{4},\dfrac{5}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle \dfrac{9}{4},3\right\rangle$

Resolución

Tema: Inecuaciones trigonométricas

$$\text{sen}\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\text{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

Análisis y procedimiento

De la condición

$$\text{sen}(\pi x)-\cos(\pi x)<0;\ 1<x<3$$

Mediante la identidad de arcos compuestos

$$\sqrt{2}\text{sen}\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)<0$$

La función seno es negativa en el tercer y cuarto cuadrante.

$$\pi<\pi x-\frac{\pi}{4}<2\pi$$

$$\frac{5\pi}{4}<\pi x<\frac{9\pi}{4}$$

$$\frac{5}{4}<x<\frac{9}{4}$$

Entonces

$$x\in\left\langle\frac{5}{4};\frac{9}{4}\right\rangle\qquad\text{(I)}$$

Además, por dato

$$x\in\langle 1;3\rangle\qquad\text{(II)}$$

Intersectando (I) y (II) tenemos

$$x\in\left\langle\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right\rangle$$

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Respuesta

$\left\langle \frac{5}{4}; \frac{9}{4} \right\rangle$

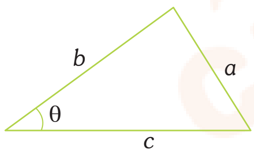
Pregunta N.° 27

Los vértices de un triángulo son:
$A=(-1, -1)$, $B=(1, 2)$, $C=(5, 1)$
Entonces el coseno del ángulo $B\hat{A}C$ vale:

A) 0,789 B) 0,798 C) 0,879
D) 0,897 E) 0,987

Resolución

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos
Teorema de cosenos

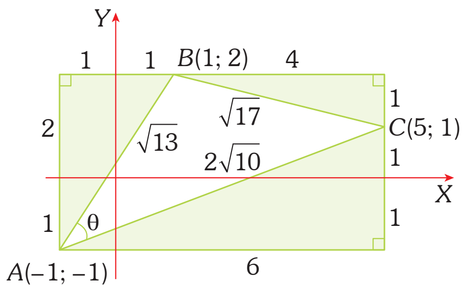


$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$$

$$\rightarrow \cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Análisis y procedimiento

Piden cosθ.



Por el teorema de cosenos

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{10})^2+\sqrt{13}^2-\sqrt{17}^2}{2(2\sqrt{10})(\sqrt{13})}$$

$$\cos\theta=\frac{9}{\sqrt{130}}$$

$\therefore$ $\cos\theta=0{,}789$

Respuesta

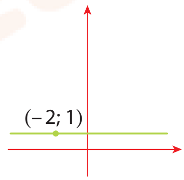
0,789

Pregunta N.° 28

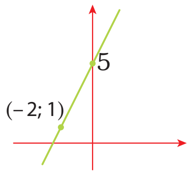
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=-2+t^2, y=1+2t^2; t\in\mathbb{R}\right\}$$

Entonces la gráfica que representa a A es:

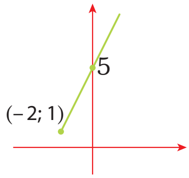
A)



B)

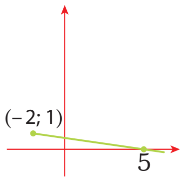


C)

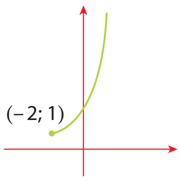


ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

D)



E)



Resolución

Tema: Ecuaciones paramétricas

Una ecuación paramétrica permite representar una o varias curvas o superficies en el plano o en el espacio mediante valores arbitrarios o mediante una constante llamada parámetro.

Análisis y procedimiento

Piden la gráfica que representa A.

$A=\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2/x=-2+t^2;\, y=1+2t^2;\, t \in \mathbb{R}\}$

$x=-2+t^2 \;\rightarrow\; x \geq -2$ (I)

$y=1+2t^2 \;\rightarrow\; y \geq 1$ (II)

De (I)×2

$2x=-4+2t^2$

Eliminamos el parámetro t^2 para relacionar x; y.

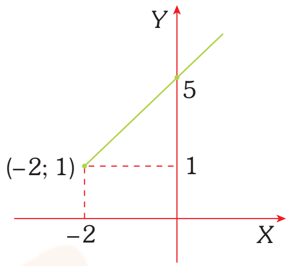
$$\begin{array}{r}2x=-4+2t^2\\ \underline{y=1+2t^2}\\ 2x-y=-5\end{array}\;(-)$$

Grafiquemos la recta.

$2x-y+5=0;\; x \geq -2$

$y \geq 1$

Respuesta



Pregunta N.° 29

Tres de las diagonales de un polígono regular forman un triángulo equilátero. Determine la suma de los ángulos internos si se sabe que la medida de su ángulo interno es mayor que 140° pero menor que 156°.

A) 1440°
B) 1620°
C) 1800°
D) 1980°
E) 2160°

Resolución

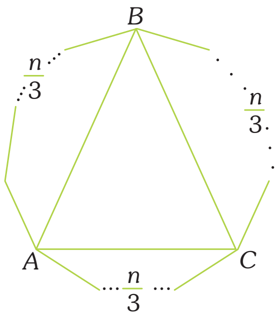
Tema: Polígonos

Análisis y procedimiento

Nos piden la suma de ángulos internos (Sm∢int).

Dato: 140° < α < 156°, donde α es la medida del ángulo interior.

ACADEMIA CESAR VALLEJO



Sea n el número de lados.

En el gráfico, si $\triangle ABC$ es equilátero

$\rightarrow \quad n=\overset{\circ}{3}$ (I)

Además, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son las diagonales del polígono regular.

Luego, si α es la medida del ángulo interior

$$\rightarrow \quad \alpha=\frac{180°(n-2)}{n}$$

Reemplazando en el dato

$$140°<\frac{180°(n-2)}{n}<156°$$

$9<n<15$ (II)

En (I) y (II), $n=12$

Luego

$Sm\sphericalangle int=180°(n-2)$

$Sm\sphericalangle int=180°(12-2)$

$\therefore \quad Sm\sphericalangle int=1800°$

Respuesta

1800°

Pregunta N.° 30

$\mathscr{C}$ es una circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y P es un punto exterior a $\mathscr{C}$. Se trazan los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ tal que la prolongación de $\overline{PB}$ corta a la circunferencia en C. Si el ángulo APC mide 25°, calcule la medida del ángulo CAP.

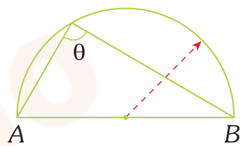
A) 53° B) 65° C) 45°
D) 37° E) 55°

Resolución

Tema: Circunferencia

Recuerde que si $\overline{AB}$ es diámetro, se cumple que

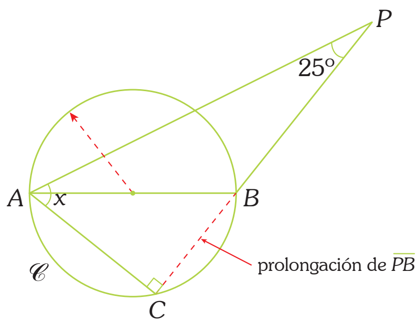
$\boxed{\theta=90}$



Análisis y procedimiento

Nos piden x.

Dato: $m\sphericalangle APC=25°$



- Como $\overline{AB}$ es diámetro, entonces $m\sphericalangle ACB=90°$.
- Luego en el triángulo rectángulo ACP, se observa que

$x+25°=90°$

$\therefore \quad x=65°$

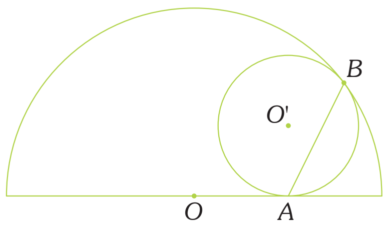
Respuesta

65°

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Pregunta N.º 31

En la figura mostrada, O es el centro de la semicircunferencia de radio 12 cm y O' es el centro de la circunferencia de radio 4 cm. Si la circunferencia es tangente en A y B a la semicircunferencia, calcule AB en cm.



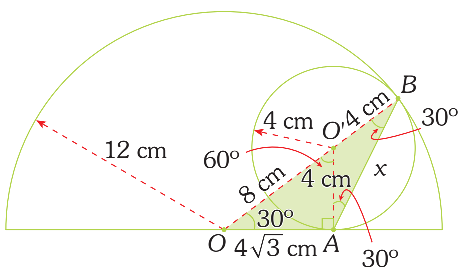
A) $2\sqrt{6}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$
E) $6\sqrt{2}$

Resolución

Tema: Circunferencia

Análisis y procedimiento
Nos piden AB en cm.

Datos
La semicircunferencia de centro O tiene su radio igual a 12 cm, y el radio de la circunferencia de centro O' es 4 cm.



Sea $AB=x$.

Por posiciones relativas entre circunferencias tangentes interiores, O, O' y B son colineales, entonces $OO'=8$ cm y $O'B=4$ cm.

Trazamos $\overline{O'A}$, entonces $m\measuredangle OAO'=90º$; además, $⊿OAO'$ es notable de 30º y 60º; por lo tanto, $m\measuredangle AOO'=30º$, $m\measuredangle AO'O=60º$ y $OA=4\sqrt{3}$ cm.

En el $\triangle AO'B$, $AO'=O'B$, entonces

$m\measuredangle O'AB=m\measuredangle ABO'=30º$.

Finalmente, el $\triangle AOB$ es isósceles.

$\therefore\ x=4\sqrt{3}$ cm

Respuesta

$4\sqrt{3}$

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Pregunta N.º 32

En un cuadrilátero $ABCD$,

$m\measuredangle BAC=3\ m\measuredangle ACD$,

$m\measuredangle ABC=m\measuredangle ADC=90º$.

Si $\overline{AC}\cap\overline{BD}=\{F\}$, $FC=10$ m, $BD=9$ m,

calcule AF (en metros).

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

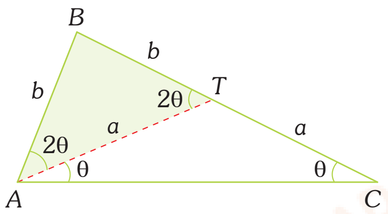
Resolución

Tema: Relaciones métricas en la circunferencia

Recuerde que

$m\measuredangle BAC=3(m\measuredangle ACB)$

entonces se traza la ceviana AT, tal que $\triangle ATB$ y $\triangle ATC$ sean isósceles.



Análisis y procedimiento

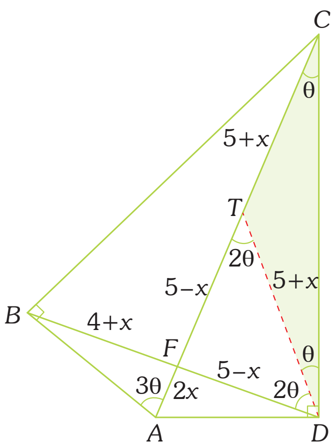
Nos piden AF.

Datos

$FC=10$ y $BD=9$

$m\measuredangle BAC=3(m\measuredangle ACD)=3\theta$

$m\measuredangle ABC=m\measuredangle ADC=90°$



Sea $AF=2x$

El $\square ABCD$: inscriptible

$\rightarrow$ $m\measuredangle BDC=m\measuredangle BAC=3\theta$

En $\triangle CDF$: uso de la ceviana

Luego $\triangle FTD$ y $\triangle CTD$: isósceles

En $\square ABCD$: inscriptible (teorema de cuerdas)

$(2x)(10)=(5-x)(4+x)$

$\rightarrow$ $x=1$

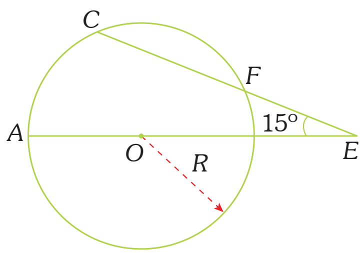
$\therefore$ $2x=2$

Respuesta

2

Pregunta N.° 33

En la figura mostrada, O es centro de la circunferencia cuyo radio mide R unidades. Si $AO=FE$ y $m\measuredangle CEA=15°$, entonces el área del sector circular AOC es a la longitud de la circunferencia como:



A) $\frac{R}{12}$ B) $\frac{R}{14}$ C) $\frac{R}{15}$

D) $\frac{R}{16}$ E) $\frac{R}{18}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Resolución

Tema: Áreas de regiones circulares

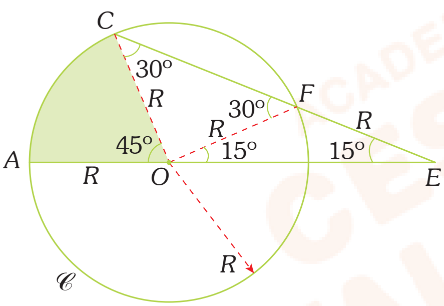
Nos piden

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{sector}\\AOC}}}{\text{Longitud de } \mathscr{C}}$$

Análisis y procedimiento

Datos:

$AO=FE$ y $m\measuredangle CEA=15°$



Se sabe que

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{sector}\\AOC}}=\frac{(45°)\pi R^2}{360°}=\frac{\pi R^2}{8}$$

Longitud de $\mathscr{C}=2\pi R$

Luego

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{sector}\\AOC}}}{\text{Longitud de } \mathscr{C}}=\frac{\frac{\pi R^2}{8}}{2\pi R}=\frac{R}{16}$$

Respuesta

$\frac{R}{16}$

Pregunta N.° 34

Desde un punto exterior a un plano se trazan tres oblicuas congruentes de 14 m de longitud, de modo que sus pies son los vértices de un triángulo equilátero cuya área es $\frac{81}{4}\sqrt{3}\text{ m}^2$. Calcule la distancia del punto al plano.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

Resolución

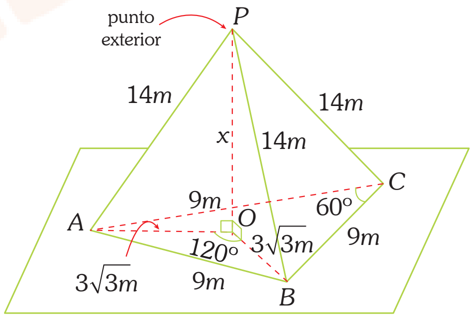
Tema: Pirámide regular

Análisis y procedimiento

Nos piden la distancia del punto al plano igual a x.

Datos

Las oblicuas miden 14 m, y los pies son los vértices de una región equilátera cuya área es $\frac{81\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$.



- Sea P el punto exterior, la región ABC es equilátera ($AB=BC=AC$).
- Por dato, $\mathbb{A}_{\triangle ABC}=\frac{81\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$

Entonces

$$\frac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{81\sqrt{3}}{4}\text{ m}^2$$

$AB=9m$

- Como PO es la distancia al plano y P-ABC es una pirámide regular, entonces O es circuncentro del $\triangle ABC$.

- En el $\triangle AOB$, $AO=OB$ y $m\measuredangle AOC=120°$, entonces

$$9m = AO\left(\sqrt{3}\right) \text{ y } AO = 3\sqrt{3}m$$

- Finalmente, en el ⊿AOP se aplica el teorema de Pitágoras

$$(14m)^2 = x^2 + \left(3\sqrt{3}m\right)^2$$

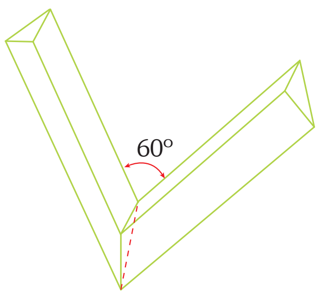
$\therefore\ x=13m$

Respuesta

13

Pregunta N.° 35

Se quiere formar la letra "V" con dos troncos iguales de prisma oblicuo de base triangular, con un ángulo de abertura de 60°, tal como se muestra en la gráfica. El área de la base común es de 30 m^2 y la suma de las aristas laterales de uno de los troncos es 36 m. Calcule el volumen (en m^3) del material necesario para su construcción.



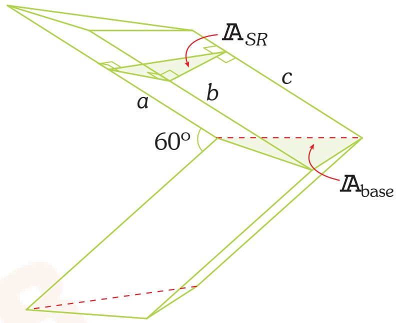
A) 60 B) 120 C) 360
D) $360\sqrt{3}$ E) 720

Resolución

Tema: Tronco del prisma oblicuo

Análisis y procedimiento

Piden el volumen del sólido ($\mathbb{V}_S$).



- Sea $\mathbb{A}_{SR}$: Área de la sección recta
- Luego

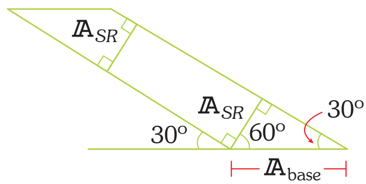
$$\mathbb{V}_S=2(\mathbb{V}_{\text{tronco del prisma oblicuo}})$$

$$\mathbb{V}_S = 2\left(\mathbb{A}_{SR}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\right)$$

- Del dato, $a+b+c=36$, entonces

$$\mathbb{V}_S=24(\mathbb{A}_{SR}) \qquad \text{(I)}$$

- Proyectamos al sólido en una vista de canto



- Luego $\mathbb{A}_{SR}=\mathbb{A}_{base}\cos 60°$
- Por dato, $\mathbb{A}_{base}=30$

$$\mathbb{A}_{SR}=15 \qquad \text{(II)}$$

- De (I) y (II)

$$\mathbb{V}_S=360$$

Respuesta

360

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Pregunta N.° 36

En un tetraedro regular, determine la medida del ángulo entre las medianas de dos caras, si las medianas no se intersecan.

A) $\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{3}\right)$

B) $\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{2}{3}\right)$

C) $\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{6}\right)$

D) $\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{7}\right)$

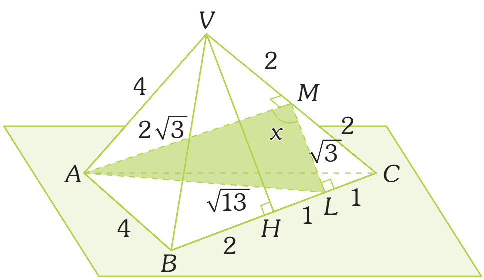
E) $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{3}\right)$

Resolución

Tema: Poliedros regulares

Análisis y procedimiento

Nos piden la medida del ángulo entre dos medianas de dos caras de un tetraedro regular.
Dato: las medianas consideradas no se intersecan.



Según el gráfico, $VABC$ es el tetraedro regular, donde $\overline{AM}$ y $\overline{VH}$ son las medianas de dos caras que no se intersecan.

Asumimos, $VA=4$.
entonces, $VM=MC=2$.

Luego trazamos $\overline{ML} // \overline{VH}$,
entonces $m\measuredangle(\overline{AM}; \overline{VH})=x$.

En el $\triangle ABL$

$$AL=\sqrt{13}.$$

En $\triangle AML$, por teorema de cosenos

$$\sqrt{13}^2=\sqrt{3}^2+(2\sqrt{3})^2-2(2\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos x$$

$$\therefore \quad x=\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{6}\right)$$

Respuesta

$\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{6}\right)$

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Pregunta N.° 37

Se tiene un cono circular recto de volumen V y longitud de la altura H. La superficie lateral de este cono se interseca por dos planos paralelos a la base que trisecan a la altura H, obteniéndose conos parciales de volumen V_1 y V_2, respectivamente ($V_2>V_1$).

Si $V=aV_1+bV_2$, calcule el cociente $\frac{a}{b}$, sabiendo que $a-2b=12$.

A) 8

B) 9

C) 10

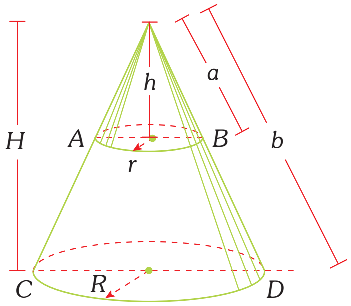
D) 11

E) 12

Resolución

Tema: Cono de revolución

Recuerde que



Si $\overline{AB}//\overline{CD}$, se cumple que

$$\boxed{\frac{V_{\text{cono menor}}}{V_{\text{cono mayor}}}=\left(\frac{r}{R}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{h}{H}\right)^3=K^3}$$

donde K es la razón de semejanza.

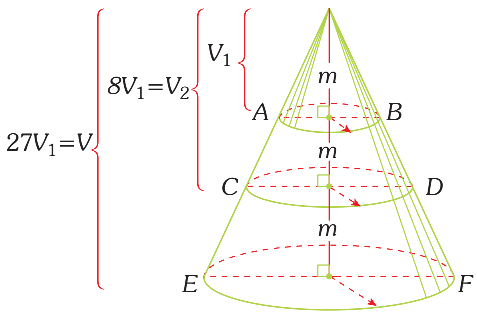
Análisis y procedimiento

Nos piden $\frac{a}{b}$.

Datos: $V_2>V_1$

$V=aV_1+bV_2$

$a-2b=12$



Como $\overline{AB}//\overline{CD}//\overline{EF}$, se cumple que

$$\frac{V_1}{(m)^3}=\frac{V_2}{(2m)^3}=\frac{V}{(3m)^3}$$

Luego

$V_2=8V_1$ y $V=27V_1$

Del dato

$V=aV_1+bV_2$

$27V_1=aV_1+b(8V_1)$

$\rightarrow$ $27=a+8b$

pero $12=a-2b$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que

$b=\frac{3}{2}$ y $a=15$

$\therefore$ $\frac{a}{b}=10$

Respuesta

10

Pregunta N.° 38

En un tetraedro regular de arista a, la distancia desde el centro de una de sus caras a cada una de las caras restantes es:

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{\frac{2}{3}}a$

D) $\frac{a}{\sqrt{6}}$ E) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a$

Resolución

Tema: Poliedros regulares

Análisis y procedimiento

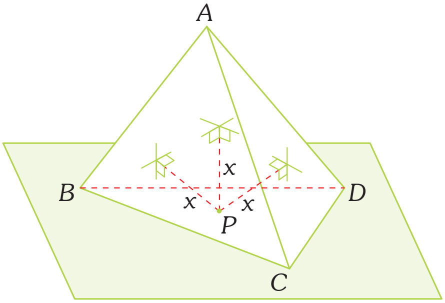
Nos piden la distancia desde el centro de una de las caras a cada una de las caras restantes de un tetraedro regular.

Dato: tetraedro regular de arista a.

Como el tetraedro es regular, el centro de una cara equidista de las otras tres.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Sea x esa distancia.



Entonces

$$\mathbb{V}_{ABCD}=\mathbb{V}_{P\text{-}ABC}+\mathbb{V}_{P\text{-}ACD}+\mathbb{V}_{P\text{-}ABD} \qquad \text{(I)}$$

Nótese

$$\mathbb{V}_{P\text{-}ABC}=\mathbb{V}_{P\text{-}ACD}=\mathbb{V}_{P\text{-}ABD}=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \text{(II)}$$

Además

$$\mathbb{V}_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12} \qquad \text{(III)}$$

Luego, (III) y (II) en (I)

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=3\left[\frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot x\right]$$

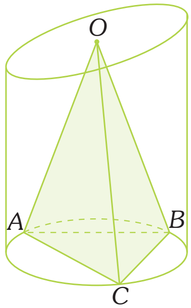
$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

Respuesta

$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$

Pregunta N.° 39

En la figura, O-ABC es una pirámide regular. Calcule la relación que existe entre el volumen de la pirámide regular y el volumen del tronco de cilindro (O es centro).



A) $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$

B) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

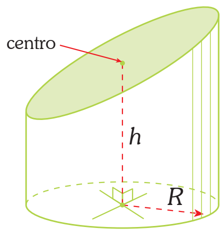
D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

Resolución

Tema: Pirámide regular

Tronco de cilindro de revolución



Se cumple

$$\boxed{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cilindro}\\ \text{de revolución}}}=\pi R^2\cdot h}$$

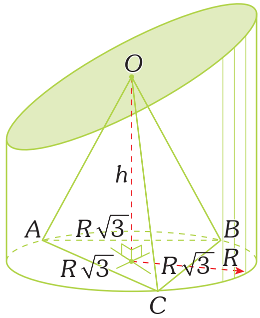
Análisis y procedimiento

Nos piden

$$\frac{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\ \text{regular}}}}{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cilindro}\\ \text{de revolución}}}}$$

ACADEMIA CESAR VALLEJO

Datos
El sólido O-ABC es una pirámide regular y O es centro de una base del tronco de cilindro.



Sea R el radio de la base del tronco de cilindro.

Como el triángulo equilátero ABC está inscrito en la circunferencia

$$AB=BC=AC=R\sqrt{3}$$

Calculamos lo que nos piden.

$$\frac{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\ \text{regular}}}}{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cilindro}\\ \text{de revolución}}}}=\frac{\left(\dfrac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right)\dfrac{(h)}{3}}{\pi R^2\cdot h}$$

$$\frac{\mathbb{V}_{\substack{\text{pirámide}\\ \text{regular}}}}{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de cilindro}\\ \text{de revolución}}}}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

Respuesta

$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

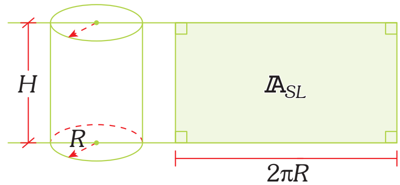
Pregunta N.° 40

Un stand de una feria de libros tiene un piso rectangular de 2880 m^2 y el techo tiene una forma semicilíndrica. ¿Cuántos m^2 de lona se necesitarían para el techo, si el largo del stand es el quíntuple del ancho?

A) 1240π B) 1340π C) 1440π
D) 1540π E) 1640π

Resolución

Tema: Cilindro



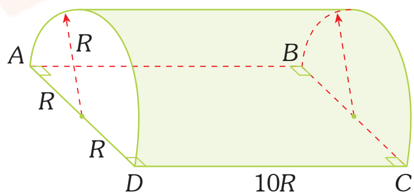
Área de la superficie lateral del cilindro circular recto

$$\boxed{\mathbb{A}_{SL}=2\pi RH}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{A}_{SL}$.
$\mathbb{A}_{SL}$: área de la superficie semicilíndrica del stand

Datos: $DC=5(AD)=10R$
$\mathbb{A}_{ABCD}=2880$



Del gráfico (sup. semicilíndrica)

$$\mathbb{A}_{SL}=(\pi R)(10R)$$
$$\mathbb{A}_{SL}=10\pi R^2 \qquad \text{(I)}$$

Del dato

$$\mathbb{A}_{ABCD}=2880$$
$$(2R)(10R)=2880$$
$$\rightarrow\ R=12 \qquad \text{(II)}$$

De las ecuaciones (I) y (II)

$$\mathbb{A}_{SL}=1440\pi$$

Respuesta

1440π

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO