PARTE I

PREGUNTA N.° 1

Una editorial ha realizado un estudio y concluye que si regala x libros a docentes universitarios, el número de ventas de estos libros es de $2000-1000e^{-0{,}001x}$.
Indique la secuencia correcta después de determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. La venta de libros aumenta si se regalan más libros.
II. Si no se regalan libros, se venden 1000 libros.
III. El máximo número de libros a vender es 2000.

A) VVV B) FVV C) FVF
D) VFV E) FFV

Resolución

Tema: Funciones exponenciales

Análisis y procedimiento

Sea $f_{(x)}=2000-1000e^{-0{,}001x}$ la función de modelamiento que representa el número de ventas.
Donde
x: número de libros a regalar
Si $x=0$, no se regala libros.

Entonces
$x \geq 0$

Ahora

$$f_{(x)}=2000-1000\left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}001x}$$

Como

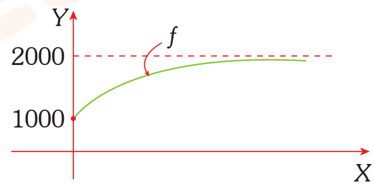
$$0<\left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}001x}\leq 1 \quad \forall\, x\geq 0$$

$$0>-1000\left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}001x}\geq -1000$$

$$2000>2000-1000\left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}001x}\geq 1000$$

$$1000\leq f_{(x)}<2000$$

Graficamos



Observación

Como $f_{(x)}$ es una función de modelamiento, podemos considerar que
$1000\leq f_{(x)}\leq 2000$

I. **Verdadera**
Pues $f_{(x)}$ es una función creciente.

II. **Verdadera**
Pues $f_{(0)}=1000$.

III. **Verdadera**
Teniendo en cuenta la observación, $\text{máx}(f_{(x)})=2000$.

Respuesta
VVV

PREGUNTA N.° 2

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $A=A^T$ donde A es triangular superior, entonces A es matriz nula.
II. Si $A=-A^T$ donde A es triangular inferior, entonces A es matriz diagonal.
III. Si A es una matriz rectangular de orden $m\times n$, entonces AA^T es una matriz cuadrada de orden $m\times m$ y todos los elementos de su diagonal son no negativos.

A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) FFV
E) FFF

Resolución

Tema: Matrices

Tenga en cuenta que la matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz diagonal si $a_{ij}=0\ \forall\ i\neq j$ y, además, al menos un elemento de su diagonal principal es distinto de cero.

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**

Veamos un contraejemplo.

Sea $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ una matriz triangular superior.

Entonces

$$A^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$A=A^T$, sin embargo, A no es matriz nula.

II. **Falsa**

Sea $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\b&c&0\\m&n&p\end{bmatrix}$ una matriz triangular inferior.

Entonces

$$-A^T=\begin{bmatrix}-a&-b&-m\\0&-c&-n\\0&0&-p\end{bmatrix}$$

Como $A=-A^T$

$\rightarrow\ b=m=n=0;\ \ a=-a;\ \ c=-c;\ \ p=-p$

Luego

$a=c=p=0$

Por lo tanto, $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ no es una matriz diagonal.

III. **Falsa**

Veamos un contraejemplo.

Sea $A=\begin{bmatrix}i&i&i\\1&1&1\end{bmatrix}$, donde $i=\sqrt{-1}$.

Entonces

$$A^T=\begin{bmatrix}i&1\\i&1\\i&1\end{bmatrix}$$

Luego

$$AA^T=\begin{bmatrix}i&i&i\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i&1\\i&1\\i&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&3i\\3i&3\end{bmatrix}$$

Se observa que no todos los elementos de su diagonal son no negativos.

Respuesta

FFF

PREGUNTA N.º 3

Sea A, B y C matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 7 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

Si se tiene que: $5X=3(A-4(B+C)-X)+A$.
Halle el determinante de X.

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

Resolución

Tema: Matrices

Análisis y procedimiento

Se tiene

$$A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 7 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

Entonces

$$B+C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

De

$$5X=3(A-4(B+C)-X)+A$$
$$5X=4A-12(B+C)-3X$$
$$8X=4A-12(B+C)$$
$$8X=4\begin{pmatrix}1 & 8\\ 7 & 3\end{pmatrix}-12\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$
$$8X=\begin{pmatrix}16 & 56\\ -8 & 24\end{pmatrix}$$
$$X=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Nos piden

$$\det(X)=13$$

Respuesta

13

PREGUNTA N.º 4

Halle los valores de x e y respectivamente tales que
$\alpha x+\beta y=-1$
$(\beta-1)x+(\alpha+1)y=3$
además se cumple que:
$\alpha+3\beta+1=3\alpha+\beta+x=\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta\neq 0$

A) 0 y 1
B) 1 y 0
C) 1 y –1
D) –1 y 1
E) 1 y 1

Resolución

Tema: Sistema de ecuaciones lineales

Recuerde que dado el sistema en variables x, y

$$\begin{cases}ax+by=c\\ mx+ny=p\end{cases}$$

se cumple

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\ p & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ m & n\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ m & p\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ m & n\end{vmatrix}}$$

Análisis y procedimiento

Se tiene

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y=-1\\ (\beta-1)x+(\alpha+1)y=3\end{cases}$$

Por dato $\alpha+3\beta+1=3\alpha+\beta+x=\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta\neq 0$

Luego

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & \beta\\ 3 & \alpha+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta-1 & \alpha+1\end{vmatrix}}=\frac{-\alpha-1-3\beta}{\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta}=\frac{-(\alpha+3\beta+1)}{\alpha+3\beta+1}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ \beta-1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta-1 & \alpha+1\end{vmatrix}}=\frac{3\alpha+\beta-1}{\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta}=\frac{3\alpha+\beta+x}{\alpha+3\beta+1}=1$$

$\rightarrow\ x=1 \wedge y=-1$

Respuesta

–1 y 1

PREGUNTA N.º 5

Si cada una de las series que se suman es convergente, halle:

$$S=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K\frac{1}{2^K}+\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^K$$

A) $S=0$
B) $S=2/3$
C) $S=1$
D) $S=2$
E) $S=8/3$

Resolución

Tema: Series

Tenga en cuenta la siguiente serie geométrica.

$$\sum_{K=0}^{+\infty}r^K=1+r+r^2+r^3+\ldots=\frac{1}{1-r};\ \ 0<|r|<1$$

Análisis y procedimiento

Se tiene

$$S=\sum_{K=0}^{+\infty}(-1)^K\cdot\frac{1}{2^K}+\sum_{K=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^K$$

$$S=\sum_{K=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^K+\sum_{K=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^K$$

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$S=\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$S=\frac{2}{3}+2$$

$$\therefore\ S=\frac{8}{3}$$

Respuesta

$S=\frac{8}{3}$

PREGUNTA N.º 6

Halle la suma de la serie

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\ldots$$

A) 1
B) $1+\sqrt[3]{2}$
C) $\sqrt[3]{2}$
D) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$
E) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$

Resolución

Tema: Series

Tenga en cuenta la siguiente serie geométrica:

$$\sum_{K=0}^{+\infty}r^K=1+r+r^2+r^3+\ldots=\frac{1}{1-r}$$

donde $0<|r|<1$

Análisis y procedimiento

Sea $M=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\ldots$

Entonces

$$M=1+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4+\ldots$$

$$M=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

$$M=\frac{1}{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}}$$

$$\therefore\ M=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$$

Respuesta

$M=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$

PREGUNTA N.º 7

Considere $a > b > 0$, determine el cociente entre la menor y mayor de las raíces de la ecuación en x.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$$

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) ab

D) $a+b$ E) 1

Resolución

Tema: Expresiones fraccionarias

Análisis y procedimiento

Sea la ecuación fraccionaria

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b};\ a>b>0$$

$$\underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a+b}}=-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$\frac{\cancel{a+b}}{x(x+a+b)}=-\frac{\cancel{(a+b)}}{ab}$$

$$\rightarrow\ \frac{1}{x(x+a+b)}=-\frac{1}{ab}$$

$$\rightarrow\ x^2+(a+b)x=-ab$$

$$x^2+(a+b)x+ab=0$$

$$\begin{array}{ll} x & a \\ x & b \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)=0$$

$$\rightarrow\ x=-a \vee x=-b$$

Como $a > b > 0 \ \rightarrow\ -a < -b < 0$.

Luego, la menor solución es $(-a)$ y la mayor solución es $(-b)$.

Por lo tanto, el cociente entre la menor y la mayor solución es $\frac{a}{b}$.

Respuesta

$\frac{a}{b}$

PREGUNTA N.º 8

Si S es el conjunto solución de la inecuación

$\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|<1$, entonces $S^C=[a,b]$

Determine el valor de $3a+5b$, donde S^C es el complemento de S.

A) –2 B) –1 C) 0

D) 2 E) 3

Resolución

Tema: Valor absoluto

Recuerde que

$$\boxed{|a|<|b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b)<0}$$

Análisis y procedimiento

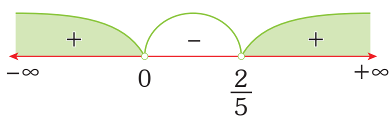
Se tiene que $\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|<1;\ x\neq\frac{1}{3}$

$$\frac{|2x-1|}{|1-3x|}<1$$

$$|2x-1|<|1-3x|$$

$$\rightarrow\ (2x-1+1-3x)(2x-1-(1-3x))<0$$

$$(-x)(5x-2)<0 \ \rightarrow\ (x)(5x-2)>0$$



$$\rightarrow\ x\in\langle-\infty;0\rangle\cup\left\langle\frac{2}{5};+\infty\right\rangle$$

Luego $\underset{\text{(conjunto solución)}}{S}=\langle-\infty;0\rangle\cup\left\langle\frac{2}{5};+\infty\right\rangle$

$$S^C=\left[0;\frac{2}{5}\right]=\underbrace{[a;b]}_{\text{(dato)}}\ \rightarrow\ a=0\ \text{ y }\ b=\frac{2}{5}$$

Por lo tanto, el valor de $3a+5b$ es 2.

Respuesta

2

PREGUNTA N.º 9

Sea la función f que satisface la ecuación $f(x)^2+2f(x)=x+1$. Si f toma valores positivos en su dominio, halle tal dominio.

A) $\langle -1; +\infty\rangle$
B) $[0; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; 0\rangle$
D) $\mathbb{R}$
E) $\langle -1; 1\rangle$

Resolución

Tema: Funciones

Recuerde que

- f toma valores positivos, lo cual significa que $f(x) > 0$.
- $\text{Dom} f=\{x \in \mathbb{R} / y=f(x)\}$

Análisis y procedimiento

$$f_{(x)}^2+2f(x)=x+1$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}^2+2f(x)+1=x+2$$

$$\rightarrow\ (f(x)+1)^2=x+2$$

Como $f(x)> 0 \ \rightarrow\ f(x)+1>1$

$$\rightarrow\ \underbrace{(f(x)+1)^2}_{x+2\,>\,1} >1$$

$$\rightarrow\ x > -1$$

$$\text{Dom} f=\langle -1; +\infty\rangle$$

Respuesta

$\langle -1; +\infty\rangle$

PREGUNTA N.º 10

Sean los conjuntos
$A=\{(x; y)\in \mathbb{R}^2 / x-1 \leq y \leq x+1\}$
$B=\{(x; y)\in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3\}$
Después de graficar $A \cap B$ se obtiene los vértices: $(a; b)$, $(c; d)$, $(e; f)$, $(g; h)$.
Calcule $a+b+c+d+e+f+g+h$

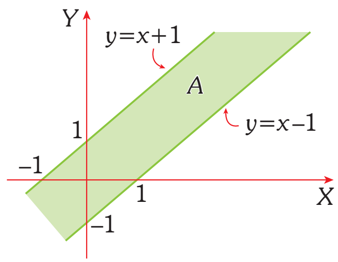
A) 8
B) 2
C) 16
D) 20
E) 24

Resolución

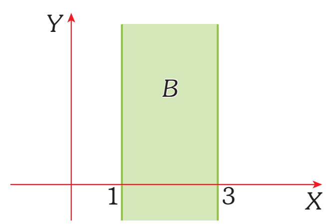
Tema: Gráficas de relaciones

Análisis y procedimiento

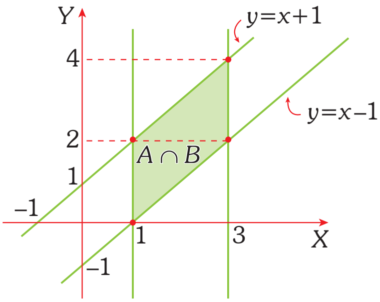
- $A=\left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x-1 \leq y \leq x+1\right\}$



- $B=\left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3\right\}$



- $A\cap B=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x-1\le y\le x+1 \wedge 1\le x\le 3\}$



Se tiene

vértices$=\{(1;0), (3;2), (3;4), (1;2)\}$

$=\{(a;b), (c;d), (e;f), (g;h)\}$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f+g+h=16$

Respuesta

16

PREGUNTA N.º 11

Sea f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función, tal que cumple $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$ para cualquier $a, b, x, y\in\mathbb{R}$, donde $f(1)=1$.

Si $y^{f(2)}+6y+f(9)=n^2$. Halle un valor de y.

A) $3-n$
B) $n-3$
C) $n-2$
D) $2-n$
E) $n-1$

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Si tenemos

$f(ax+by)=af(x)+bf(y);\ \forall\ a;\ b;\ x;\ y\in\mathbb{R}$

entonces evaluamos en $x=1$, $y=1$.

$\rightarrow\ f(a+b)=af(1)+bf(1)$

Como $f(1)=1$

$\rightarrow\ f(a+b)=a+b;\ \forall\ a;\ b\in\mathbb{R}$

$\rightarrow\ \boxed{f(t)=t;\ \forall\ t\in\mathbb{R}}$

Luego

$y^{f(2)}+6y+f(9)=n^2$

$y^2+6y+9=n^2$

$(y+3)^2=n^2$

$\rightarrow\ y+3=n\ \vee\ y+3=-n$

$y=n-3\ \vee\ y=-n-3$

Por lo tanto, un valor de y es $n-3$.

Respuesta

$n-3$

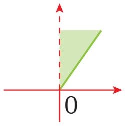
PREGUNTA N.º 12

Señale el gráfico de $R_1\cap R_2$, donde

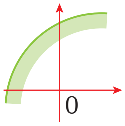
$R_1=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y\ge(x+1)^{\log_{(x+1)}(x)}\right\}$

$R_2=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y\le 1+\log(x+2)\right\}$

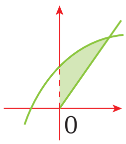
A)



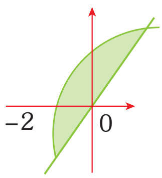
B)



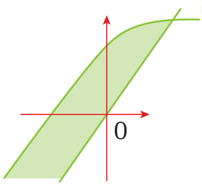
C)



D)



E)



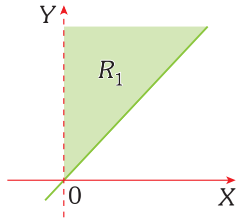
Resolución

Tema: Gráficas de relaciones

Análisis y procedimiento

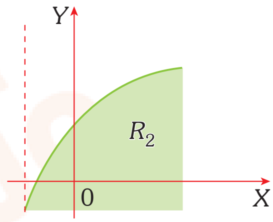
- $R_1=\left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2/y\geq(x+1)^{\log_{(x+1)}(x)}\right\}$

  $(x;\,y)\in R_1 \leftrightarrow x+1>0 \wedge x+1\neq 1$
  $\wedge\, x>0 \wedge y\geq x$
  $\leftrightarrow x>0 \wedge y\geq x$

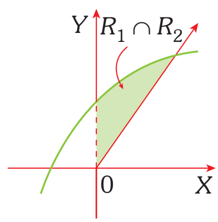


- $R_2=\left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2/y\leq 1+\log(x+2)\right\}$

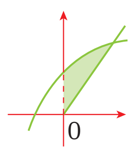
  $(x;\,y)\in R_2 \leftrightarrow y\leq 1+\log(x+2)$



- $R_1\cap R_2=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/(y\geq x \wedge x<0)\right.$
  $\left.\wedge\, y\leq 1+\log(x+2)\right\}$



Respuesta



PREGUNTA N.° 13

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado:

I. Sean A, B, C eventos, entonces
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

II. Sean $S=\{(x;\ y)/x;\ y\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}\}$

$$B=\{(x;\ y)\in S/1+y<x\}$$

entonces $P(B)=\dfrac{5}{12}$

III. Si $B\subset A$, entonces $P(A\backslash B)=P(A)-P(B)$.
Donde $P(X)$ representa la probabilidad del evento X.

A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) FFV
E) FFF

Resolución

Tema: Probabilidades

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**
Por propiedad de probabilidades, tenemos
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$
Esta propiedad no coincide con la proposición que nos dan.

II. **Falsa**
Considerando que S es el espacio muestral y B el evento, hallamos el cardinal de cada uno de ellos.

- $S=\{(x;\ y)/x;\ y\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}\}$

Los elementos del conjunto S son

(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

$\Rightarrow n(S)=36$

- $B=\{(x;\ y)\in S/1+y<x\}$

$$B=\{(x;\ y)\in S/1<x-y\}$$

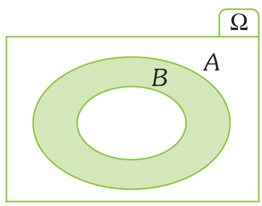
Los elementos del conjunto B son

(3; 1)	(4; 1)	(4; 2)	(5; 1)	(5; 2)
(5; 3)	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)

$\Rightarrow n(B)=10$

$$\therefore\ P(B)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}.$$

III. **Verdadera**
Partiendo de que A y B son dos eventos, donde $B\subset A$, realizamos un diagrama.



Se observa que

$$\underbrace{P(A\backslash B)}_{P(A-B)}=P(A)-P(B)$$

Respuesta
FFV

PREGUNTA N.º 14

Sea $N=111111_{(3)}$. Calcule la suma de dígitos al multiplicar en base 3, N consigo mismo.

A) $100_{(3)}$
B) $101_{(3)}$
C) $110_{(3)}$
D) $111_{(3)}$
E) $112_{(3)}$

Resolución

Tema: Operaciones fundamentales en $\mathbb{Z}^+$

Análisis y procedimiento

Para multiplicar N consigo mismo, debemos multiplicar $N\times N$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 \; \times \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1_3 & & & & & \\
\hline
2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1_3
\end{array}
$$

Para hallar el producto final, se realizó la suma por órdenes de los productos parciales.

- Orden 1: 1_3
- Orden 2: $1+1=2_3$
- Orden 3: $1+1+1=3=10_3$
- Orden 4: $1+1+1+1+1=5=12_3$
- Orden 5: $1+1+1+1+1+1=6=20_3$
- Orden 6: $1+1+1+1+1+1+2=8=22_3$
- Orden 7: $1+1+1+1+1+2=7=21_3$
- Orden 8: $1+1+1+1+2=6=20_3$
- Orden 9: $1+1+1+2=5=12_3$
- Orden 10: $1+1+1=3=10_3$
- Orden 11: $1+1=2$

Luego, hallamos la suma de cifras del resultado.

$$2+0+2+0+1+2+0+2+0+2+1=12=110_3$$

pasamos a base 3

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado obtenido es 110_3.

Respuesta

$110_{(3)}$

PREGUNTA N.º 15

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. Si $y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $x\in\mathbb{Q}$, entonces $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$.

II. Si a, b son irracionales, entonces $a+b$ y $a\cdot b$ son racionales.

III. Si $a\in\mathbb{Q}$ y b es irracional entonces $a\cdot b$ es un número irracional.

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FVV
E) FFF

Resolución

Tema: Números racionales

Ley de clausura o cerradura

Se dice que un conjunto numérico X cumple la ley de clausura respecto a la operación * si al seleccionar dos elementos cualesquiera del conjunto X y realizar la operación *, el resultado siempre pertenece al conjunto numérico.

Por ejemplo, dados los enteros (–2) y (5)

$$\left.\begin{array}{l}(-2)+(5)=+3\in\mathbb{Z}\\[2ex](-2)-(5)=-7\in\mathbb{Z}\\[2ex](-2)\times(5)=-10\in\mathbb{Z}\\[2ex]\dfrac{(-2)}{(5)}=-0{,}4\notin\mathbb{Z}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{En los }\mathbb{Z}\text{, la ley de clausura se}\\\text{cumple con las operaciones}\\\text{de adición, sustracción}\\\text{y multiplicación.}\end{array}$$

Análisis y procedimiento

I. **Verdadera**

En los racionales ($\mathbb{Q}$), se cumple la ley de clausura en la división.

Ejemplo

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=-\frac{14}{15}\in\mathbb{Q}$$

II. **Falsa**

En los irracionales, no siempre se cumple la ley de clausura en la adición ni en la multiplicación.

Ejemplo

Dados los irracionales $\left(2+\sqrt{3}\right)$ y $\sqrt{3}$.

$$\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)=2+2\sqrt{3}\rightarrow\text{Es irracional.}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)=3+2\sqrt{3}\rightarrow\text{Es irracional.}$$

III. **Falsa**

Dado

a=0 (racional) y

$b=\sqrt{3}$ (irracional)

$a\cdot b=(0)\left(\sqrt{3}\right)=0\quad\rightarrow\quad$ Es racional

Respuesta

VFF

PREGUNTA N.º 16

Sea

$$\begin{array}{r|l}\sqrt{17abcd9} & **** \\ \cline{2-2} \underline{1} & \\ -7a & \\ \underline{**} & \\ -8bc & \\ \underline{***} & \\ -26d9 & \\ \underline{**6*} & \\ ---e & \end{array}$$

donde a; b; c; d y e corresponden a un solo dígito y * puede tomar diferentes valores de un dígito. Determine el valor de $E=e+d-c+b-a$.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Resolución

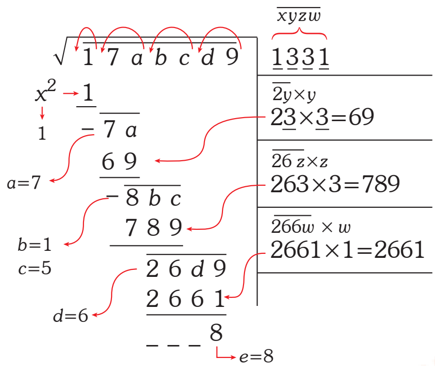
Tema: Radicación en $\mathbb{Z}^+$

Tenga en cuenta que para extraer la raíz cuadrada de un número se emplea el siguiente procedimiento.

$$\begin{array}{rr|l} & & \overline{xy} \\ & \sqrt{52\,74} & 7\;2 \\ \cline{3-3} \rightarrow & \underbrace{x^2}_{7}=\underline{49} & \times 2\;\; 14\underline{2}\times\underline{2}=284 \\ \cline{3-3} & -374 & \\ & \underline{284} & \\ & 90 & \end{array}$$

Análisis y procedimiento

Utilizamos el algoritmo para extraer la raíz cuadrada y reconstruimos la operación.



$$\therefore\ E=\underset{8}{\underset{\downarrow}{e}}+\underset{6}{\underset{\downarrow}{d}}-\underset{5}{\underset{\downarrow}{c}}+\underset{1}{\underset{\downarrow}{b}}-\underset{7}{\underset{\downarrow}{a}}=3$$

Respuesta

3

PREGUNTA N.° 17

Las magnitudes x e y son tales que $(y-4)$ y $\left(x^2-4\right)$ son inversamente proporcionales. Si el par $(-1;-2)$ satisface esa relación, determine la ecuación de proporcionalidad.

A) $y=\dfrac{18}{x^2-4}+4$

B) $y=\dfrac{-18}{x^2+4}-4$

C) $y=\dfrac{18}{x^2-4}-4$

D) $y=\dfrac{18}{x^2-4}+6$

E) $y=\dfrac{-18}{x^2-4}+12$

Resolución

Tema: Magnitudes proporcionales

Recuerde

Si A y B son dos magnitudes, se cumple:

$$A\text{ DP }B \leftrightarrow \frac{\text{valor }(A)}{\text{valor }(B)}=m \text{ cte.}$$

$$A\text{ IP }B \leftrightarrow (\text{valor }(A))\times(\text{valor }(B))=k \text{ cte.}$$

Análisis y procedimiento

Del enunciado

$(y-4)$ IP (x^2-4)

Entonces

$$(y-4)\times(x^2-4)=k \text{ cte.} \qquad (*)$$

Como el par $(-1;-2)$ satisface la relación (*)

$$\to\ (-2-4)\times\left((-1)^2-4\right)=k$$

$$(-6)\times(-3)=k$$

$$\to k=18$$

Reemplazamos en (*)

$$(y-4)\times\left(x^2-4\right)=18$$

$$y-4=\frac{18}{x^2-4}$$

$$\therefore\ y=\frac{18}{x^2-4}+4$$

Respuesta

$y=\dfrac{18}{x^2-4}+4$

PREGUNTA N.º 18

Si la diferencia entre la media aritmética y la media armónica de dos números naturales a y b es 1. Determine el menor valor de $\sqrt{a^2+b^2}$ asumiendo que $a>b$.

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{10}$

D) $2\sqrt{13}$ E) $6\sqrt{5}$

Resolución

Tema: Promedios

Análisis y procedimiento

Por dato

$$\overline{MA}(a;\, b)-\overline{MH}(a;\, b)=1;\;\; a>b$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=1$$

$$\underbrace{(a+b)^2}_{a^2+2ab+b^2}-4ab=2(a+b)$$

$$a^2-2ab+b^2=2(a+b)$$

Observe que $2(a+b)$ debe ser un cuadrado perfecto

$$\underbrace{(a-b)}_{\substack{2\\4\\6\\\vdots}}{}^2=2\underbrace{(a+b)}_{\substack{2\\8\\18\\\vdots}}$$

2 ← no cumple

8 ← mínimo

Luego

$$\begin{array}{r} a+b=8\\ a-b=4\\ \hline 2a=12\\ a=6;\; b=2 \end{array}$$

Entonces

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

Respuesta

$2\sqrt{10}$

PREGUNTA N.º 19

Dos capitales han sido colocados a interés simple durante el mismo tiempo; el primero al 6 % y el segundo al 10 %. El primero ha producido S/.825 y el segundo ha producido S/.1850, sabiendo que el segundo capital excede al primero en S/.7125. Calcule la suma de los montos obtenidos (en nuevos soles).

A) 48 375

B) 51 050

C) 52 110

D) 53 030

E) 54 100

Resolución

Tema: Regla de interés

El cálculo del interés simple depende del capital depositado (C), la tasa de interés ($r\%$) y el tiempo de depósito (t), el cual se realiza de la siguiente manera.

$$\boxed{I=C\times r\%\times t}$$

Donde $r\%$ y t deben tener las mismas unidades.

Análisis y procedimiento

Sean A y B los capitales. Del enunciado, tenemos

	1.^{er} depósito	2.^{o} depósito
Capital	S/.A	S/.B
Tasa de interés	6% anual	10% anual
Tiempo	t años	t años
Interés	S/.825	S/.1850

$B-A=$S/.7125

suma de intereses = S/.2675

Donde

$$825=A\times 6\%\times t \qquad \text{(I)}$$

$$1850=B\times 10\%\times t \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$\frac{825}{1850}=\frac{A\cdot 6}{B\cdot 10}$$

$$\frac{55}{74}=\frac{A}{B} \Rightarrow \begin{matrix} A=55k \\ B=74k \end{matrix}$$

De la diferencia de capitales, tenemos

$$B-A=\text{S/.}7125$$

$$74k-55k=\text{S/.}7125$$

$$k=\text{S/.}375$$

Finalmente, para hallar la suma de los montos, tenemos

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\\text{montos}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{suma de}\\\text{capitales}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{suma de}\\\text{intereses}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\\text{montos}\end{pmatrix}=129k+\text{S/.}2675$$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\\text{montos}\end{pmatrix}=\text{S/.}48\,375+\text{S/.}2675=\text{S/.}51\,050$$

Por lo tanto, la suma de los montos es S/.51 050.

Respuesta

51 050

PREGUNTA N.º 20

Una encuesta realizada en la ciudad de Lima muestra la tabla siguiente:

N.° de hijos	N.° de familias
0-2	1200
3-6	400
7-9	150
10-12	30
13-15	15

Calcule el número de familias que tiene de 4 hasta 11 hijos.

A) 380
B) 470
C) 480
D) 570
E) 580

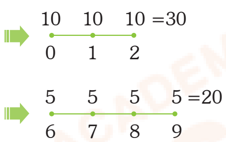
Resolución

Tema: Estadística descriptiva

Recuerde que cuando queremos distribuir la cantidad de datos de un intervalo de una variable discreta, esta se debe realizar de manera equitativa a la cantidad de valores que toma la variable en dicho intervalo.

Ejemplo

N.º de hijos	N.º de familias
0 - 2	30
3 - 5	90
6 - 9	20



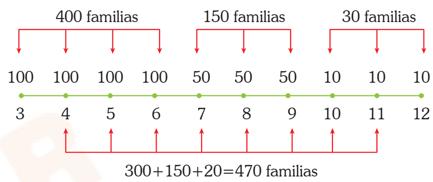
Análisis y procedimiento

Teniendo en cuenta la pregunta, procedemos a analizar la tabla.

N.º de hijos	N.º de familias
0 - 2	1200
3 - 6	400
7 - 9	150
10 - 12	30
13 - 15	15

Debemos hallar la cantidad de familias que tienen de 4 a 11 hijos.

Analizamos los intervalos sombreados en la tabla.



Por lo tanto, el número de familias que tienen de 4 a 11 hijos es 470.

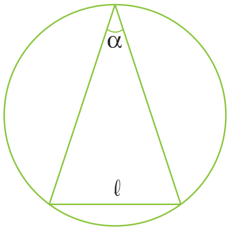
Respuesta

470

PARTE II

PREGUNTA N.° 21

En la circunferencia de radio R de la figura, determine el ángulo α de modo que $\ell=R$.



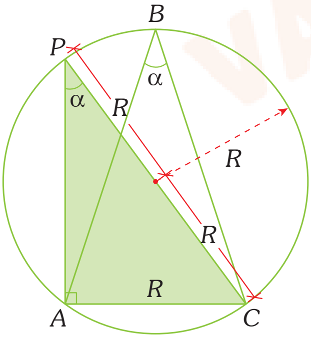
A) 15° B) 18° C) 30°
D) 36° E) 45°

Resolución

Tema: Circunferencia

Análisis y procedimiento

Dato:
$AC=R$



Se traza el diámetro $\overline{CP}$, entonces, $CP=2R$.
⊾PAC: notable 30° y 60°

$\therefore \ \alpha=30°$

Respuesta
30°

PREGUNTA N.° 22

Determine la cónica que representa la ecuación polar

$$r=\frac{8}{4+3\cos\theta}$$

A) Hipérbola
B) Parábola
C) Elipse
D) Circunferencia
E) Un punto

Resolución

Tema: Ecuaciones polares de las cónicas

Relación entre las coordenadas cartesianas y polares

$x=r\cos\theta$
$y=r\,\text{sen}\theta$
$x^2+y^2=r^2$

Análisis y procedimiento

$$r=\frac{8}{4+3\cos\theta}$$

$$r=\frac{8}{4+3\left(\dfrac{x}{r}\right)}$$

$$4r=8-3x$$
$$16r^2=(8-3x)^2$$
$$16(x^2+y^2)=64-48x+9x^2$$
$$\rightarrow\ 7x^2+48x+16y^2=64$$

Al efectuar se obtiene

$$\frac{\left(x+\dfrac{24}{7}\right)^2}{\dfrac{1024}{49}}+\frac{y^2}{\dfrac{1024}{112}}=1$$

Respuesta
Elipse

PREGUNTA N.º 23

Sea θ un ángulo en el III cuadrante que satisface:

$$(\cot\theta)^{2\tan\theta}=\frac{8}{27}$$

Determine el valor de $E=3\cos\theta+2\text{sen}\theta$.

A) $\frac{9}{\sqrt{12}}$ B) $\frac{8}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{-3}{\sqrt{13}}$

D) $\frac{-12}{\sqrt{13}}$ E) $\frac{-13}{\sqrt{12}}$

Resolución

Tema: Ángulo en posición normal

Análisis y procedimiento

Del dato

$$(\cot\theta)^{2\tan\theta}=\frac{8}{27};\quad \theta\in \text{IIIC}$$

$$(\cot\theta)^{2\tan\theta}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$(\cot\theta)^{2\tan\theta}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Comparamos

$$\tan\theta=\frac{3}{2}\ \wedge\ \theta\in\text{IIIC}$$

Entonces

$$\text{sen}\ \theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Nos piden

$$E=3\cos\theta+2\text{sen}\theta$$

$$E=3\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)+2\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

Respuesta

$$-\frac{12}{\sqrt{13}}$$

PREGUNTA N.º 24

Determine a cuál de los siguientes intervalos pertenece la solución de la ecuación trigonométrica $\cos^2x-\cos x-1=0$.

A) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{6}$

E) $\frac{5\pi}{6}<x<\pi$

Resolución

Tema: Ecuaciones trigonométricas

Recuerde que

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Análisis y procedimiento

Por condición

$$\cos^2x-\cos x-1=0$$

$$\cos^2x-\cos x+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\rightarrow\quad \cos x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Pero

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}<\cos\frac{3\pi}{4}<\cos x<\cos\frac{\pi}{2}$$

Entonces

$$\frac{5\pi}{6} > \frac{3\pi}{4} > x > \frac{\pi}{2}$$

De las alternativas se obtiene

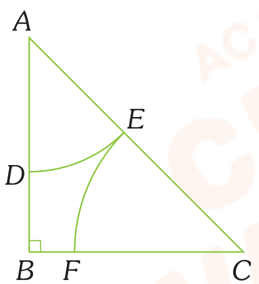
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$$

Respuesta

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$$

PREGUNTA N.º 25

La figura adjunta representa sectores circulares en el triángulo rectángulo isósceles ABC. Calcule (en cm) la suma de las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{EF}$ si $AC=1$ cm.

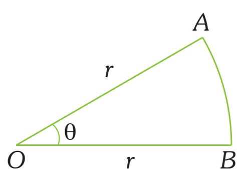


A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π

D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2π

Resolución

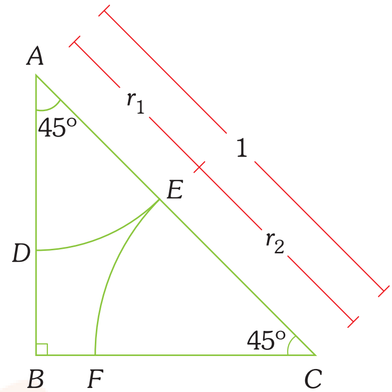
Tema: Longitud de arco de circunferencia



$$\boxed{\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \theta \cdot r}$$

Análisis y procedimiento

Según los datos



Del gráfico

$$\ell_{\overset{\frown}{ED}} = \theta \cdot r_1 = \frac{\pi}{4} r_1$$

$$\ell_{\overset{\frown}{EF}} = \alpha \cdot r_2 = \frac{\pi}{4} r_2$$

Nos piden

$$\ell_{\overset{\frown}{ED}} + \ell_{\overset{\frown}{EF}} = \frac{\pi}{4} r_1 + \frac{\pi}{4} r_2$$

$$= \frac{\pi}{4}(r_1 + r_2) = \frac{\pi}{4}(1)$$

$$\therefore\ \ell_{\overset{\frown}{ED}} + \ell_{\overset{\frown}{EF}} = \frac{\pi}{4}$$

Respuesta

$$\frac{\pi}{4}$$

PREGUNTA N.° 26

Calcule $M=\text{sen}^4\theta+\text{sen}^4 2\theta+\text{sen}^4 3\theta$; si $\theta=\dfrac{\pi}{7}$.

A) $\dfrac{21}{13}$ B) $\dfrac{21}{14}$ C) $\dfrac{21}{15}$

D) $\dfrac{21}{16}$ E) $\dfrac{21}{17}$

Resolución

Tema: Transformaciones trigonométricas

Recuerde que

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

Por identidades de degradación, se obtiene

$$8\text{sen}^4\theta=3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta$$

Análisis y procedimiento

$$M=\text{sen}^4\theta+\text{sen}^4 2\theta+\text{sen}^4 3\theta;\ \ \theta=\frac{\pi}{7}$$

$$8M=\begin{cases} 8\,\text{sen}^4\dfrac{\pi}{7}+ \\ 8\,\text{sen}^4\dfrac{2\pi}{7}+ \\ 8\,\text{sen}^4\dfrac{3\pi}{7} \end{cases}$$

$$8M=\begin{cases} 3-4\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+ \\ 3-4\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{8\pi}{7}+ \\ 3-4\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{12\pi}{7} \end{cases}$$

$$8M=9-4\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}\right)$$

$$8M=9-4\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$8M=9-4\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

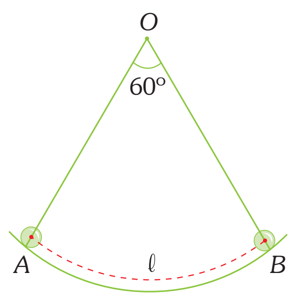
$$\therefore\ M=\frac{21}{16}$$

Respuesta

$\dfrac{21}{16}$

PREGUNTA N.° 27

Calcule el número de vueltas que da una rueda de radio $r=0{,}5$ cm, al rodar (sin resbalar) en un arco circular $\overset{\frown}{AB}$ de radio $R=6$ cm y ángulo central 60° (ver figura).



A) 1

B) 2

C) 3

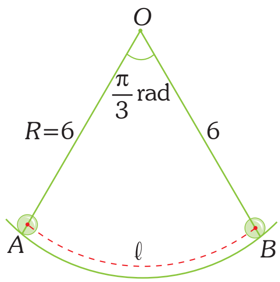
D) 4

E) 5

Resolución

Tema: Aplicación de la longitud de arco

Análisis y procedimiento



Considere que

$\ell=\theta R$

$\ell=\frac{\pi}{3}(6)$

$\ell=2\pi$

Calculamos el número de vueltas (n_v).

$$n_v=\frac{\ell}{2\pi r}$$

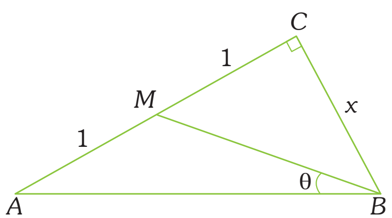
$$n_v=\frac{2\pi}{2\pi(0,5)}=2$$

Respuesta

2

PREGUNTA N.° 28

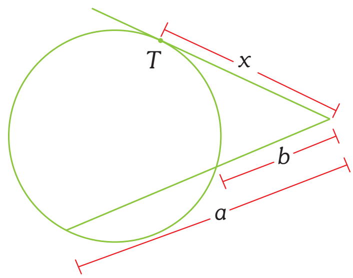
Calcule el valor de x para que el ángulo θ sea máximo.



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

Resolución

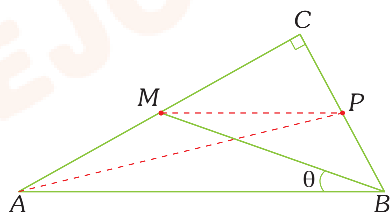
Tema: Relaciones métricas
Teorema de la tangente



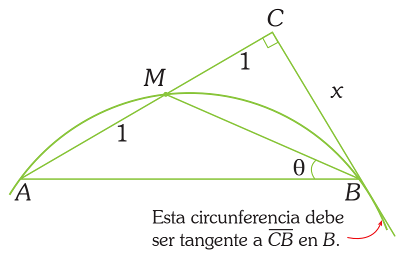
Si T es punto de tangencia

$\rightarrow$ $\boxed{x^2=ab}$

Análisis y procedimiento



Si θ es máximo, debe ser único, lo que implica que no existe un punto $P\neq B$ en $\overline{CB}$; de modo que $m\measuredangle APM=\theta$. Esto significa que la circunferencia que pasa por A; B y M no puede intersecar a $\overline{CB}$ en otro punto distinto de B; es decir, debe ser tangente.



Luego

$x^2=1(2)$

$\therefore\ x=\sqrt{2}$

Respuesta

$\sqrt{2}$

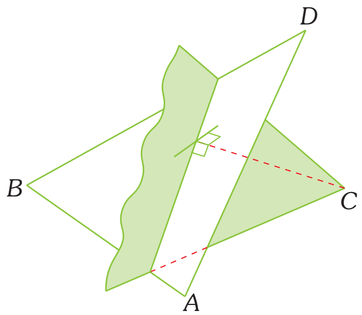
PREGUNTA N.º 29

Se tiene el triángulo equilátero *ABC* cuyo lado mide 12 m. Por el vértice *C* se traza $\overline{CD}$ perpendicular al plano que contiene dicho triángulo. Si el ángulo entre los planos determinados por *ABD* y *ABC* es 60º, entonces la distancia de *C* al plano *ABD*, en metros, es

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Resolución

Tema: Geometría del espacio

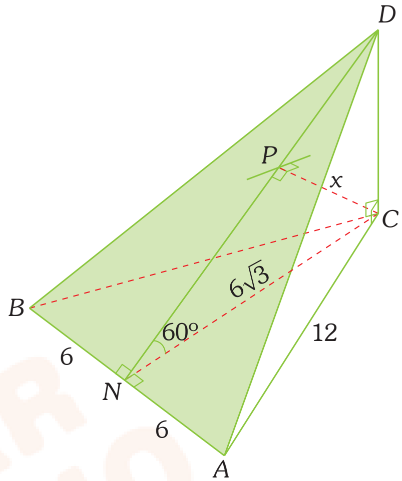


Si del punto exterior *C* al plano *ABD* se quiere trazar un segmento perpendicular, se debe trazar un plano perpendicular que pase por *C*.

Análisis y procedimiento

Dato:

$AB=BC=AC=12$ m



Nos piden la distancia de *C* al plano *ABD*: $CP=x$.

Ahora se aplica el teorema de las tres perpendiculares

1.ª $\perp$: $\overline{DC}$
2.ª $\perp$: $\overline{CN}$
3.ª $\perp$: $\overline{DN}$

Con lo cual podemos indicar que la

$m\measuredangle DNC=60º$ (dato)

Luego, el plano *DCN* es perpendicular al plano *BDA*; entonces trazamos $\overline{CP}$ perpendicular al plano *ABD*.

$\triangle NPC$ (notable de 30º y 60º)

$$x=\frac{6\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}$$

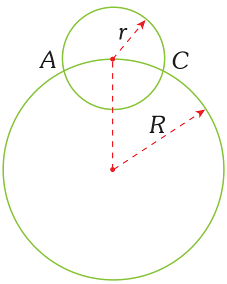
$\therefore\ x=9$

Respuesta

9

PREGUNTA N.º 30

Se tiene la siguiente figura formada por dos círculos de radios R y $r\left(r=\dfrac{R}{2}\right)$. Determine la longitud de arco de circunferencia $\overset{\frown}{AC}$.



A) $2r\cdot\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$

B) $2r\cdot\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$

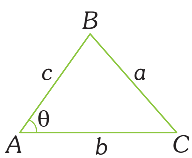
C) $4r\cdot\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$

D) $4r\cdot\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$

E) $6r\cdot\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$

Resolución

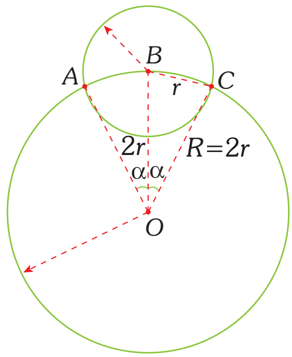
Tema: Resolución de triángulos



Teorema de cosenos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$$

Análisis y procedimiento



Del gráfico

$$\mathscr{L}_{\overset{\frown}{AC}}=(2\alpha)\cdot(R)$$

$$\mathscr{L}_{\overset{\frown}{AC}}=4\alpha\cdot r \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BOC$ (teorema de cosenos)

$$r^2=(2r)^2+(2r)^2-2(2r)(2r)\cos\alpha$$

$$\rightarrow \cos\alpha=\frac{7}{8}$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

En consecuencia

$$\alpha=\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right) \qquad \text{(II)}$$

De (II) en (I)

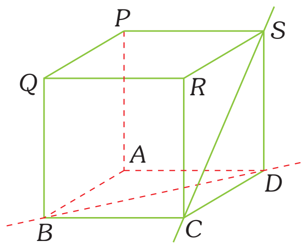
$$\mathscr{L}_{\overset{\frown}{AC}}=4r\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$$

Respuesta

$4r\,\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$

PREGUNTA N.° 31

La figura representa un cubo de arista a cm. Calcule el ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{CS}$ y $\overleftrightarrow{BD}$.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

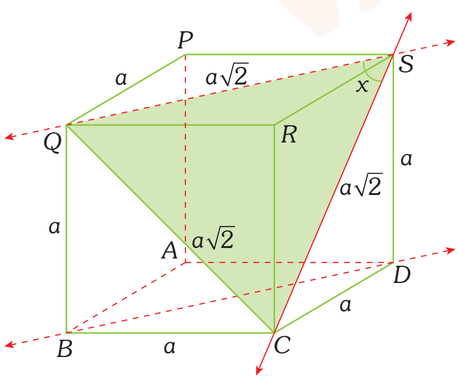
Resolución

Tema: Poliedros regulares (cubo)

Análisis y procedimiento

Nos piden la medida del ángulo formado entre las rectas $\overleftrightarrow{CS}$ y $\overleftrightarrow{BD}$.

Sea x la medida de dicho ángulo.



Se traza $\overline{QS}//\overline{BD}$, entonces la m$\measuredangle QSC$ es la medida del ángulo formado entre $\overleftrightarrow{CS}$ y $\overleftrightarrow{BD}$.

Por lo tanto, m$\measuredangle QSC=x$.

Como a es la longitud de la arista, se traza $\overline{QC}$; entonces el $\triangle CQS$ es equilátero.

$$(CS=SQ=CQ=a\sqrt{2})$$

$\therefore\ x=60°$

Respuesta

60°

PREGUNTA N.° 32

Una pirámide de base cuadrada y un cono tienen el vértice común O, la base de la pirámide está inscrita en la base del cono. Halle el volumen comprendido entre las caras de la pirámide y la superficie del cono, si el lado del cuadrado mide $\sqrt{2}$ m y la generatriz del cono 9 m.

A) $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\,\text{m}^3$ B) $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\,\text{m}^3$

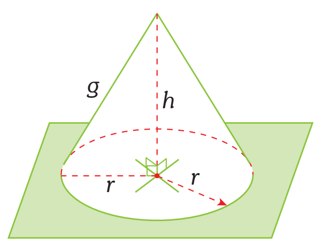
C) $\dfrac{13\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\,\text{m}^3$

D) $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}(\pi-2)\,\text{m}^3$ E) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}(\pi-2)\,\text{m}^3$

Resolución

Tema: Pirámide y cono

En un cono de revolución, se cumple que



$$\boxed{g^2=r^2+h^2}$$

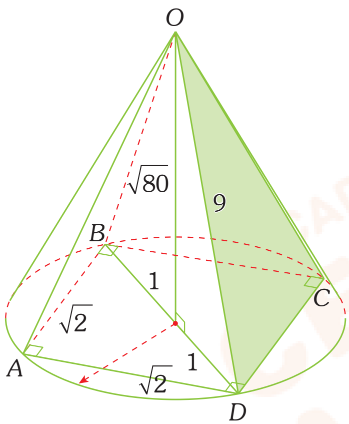
Análisis y procedimiento

Datos:

$AD=\sqrt{2}$ m

$OD=9$ m

Nos piden el volumen del sólido comprendido entre las caras de la pirámide y la superficie del cono: $\mathbb{V}$.



De los datos del problema, se infiere que el cono es de revolución y la pirámide es regular. Para resolver el problema, lo hacemos por diferencia de volúmenes, entonces

$\rightarrow \mathbb{V}=\mathbb{V}_{\text{cono}}-\mathbb{V}_{\text{pirámide}}$

$$\mathbb{V}=\frac{\pi(1)^2\sqrt{80}}{3}-\frac{2\cdot\sqrt{80}}{3}$$

$$\therefore\ \mathbb{V}=\frac{4\sqrt{5}}{3}(\pi-2)$$

Respuesta

$\frac{4\sqrt{5}}{3}(\pi-2)\,\text{m}^3$

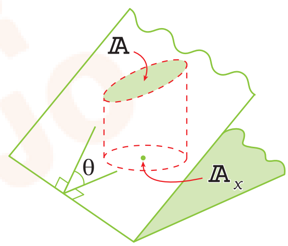
PREGUNTA N.º 33

Por el vértice B de un triángulo ABC se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con los vértices A y C. Además se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ ($H\in\overline{AC}$). Si $BH=\frac{36}{5}$, $BD=\frac{36}{5}\sqrt{3}$, entonces $\frac{\mathbb{S}_{\triangle ADC}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}$ es:

A) 1/2 B) 3/2 C) 2
D) 5/2 E) 3

Resolución

Tema: Geometría del espacio

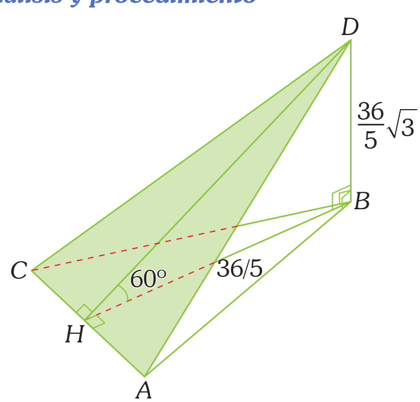


Se sabe que

$$\boxed{\mathbb{A}_x=\mathbb{A}\cos\theta}$$

(θ: medida del diedro)

Análisis y procedimiento



Datos:

$$BH=\frac{36}{5}$$

$$BD=\frac{36\sqrt{3}}{5}$$

Nos piden $\dfrac{\mathbb{S}_{\triangle ADC}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}$.

Por el teorema de las tres perpendiculares

$1.^{a}\perp:\overline{DB}$

$2.^{a}\perp:\overline{BH}$

$\rightarrow\ 3.^{a}\perp:\overline{DH}$

Ahora podemos decir que la m$\measuredangle DHB=60^{o}$ (razón entre BD y BH)

Luego podemos decir que

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=\mathbb{S}_{\triangle ADC}\ \cos 60^{o}$$

$$\frac{\mathbb{S}_{\triangle ADC}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{1}{\cos 60^{o}}$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{S}_{\triangle ADC}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=2$$

Respuesta

2

PREGUNTA N.º 34

En un cilindro circular recto, de radio 2 cm y altura 6 cm, se inscribe un paralelepípedo rectangular. El máximo volumen (en cm^3) que puede tener tal paralelepípedo es:

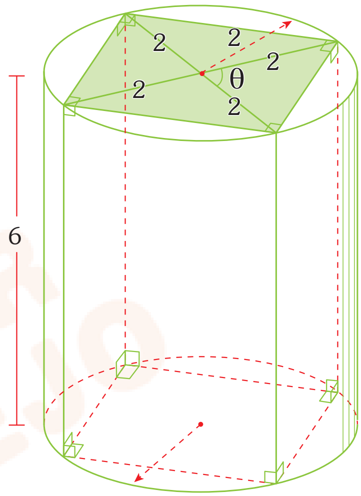
A) 44 B) 45 C) 48
D) 49 E) 51

Resolución

Tema: Sólidos geométricos (paralelepípedo)

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}_{\text{máx.}}$(paralelepípedo).



Primero calculamos el volumen y luego lo analizamos.

$$\mathbb{V}=\mathbb{A}_{\text{base}}\cdot h$$

$$\mathbb{V}=\left(\frac{4\cdot 4}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cdot 6$$

$$\mathbb{V}=48\operatorname{sen}\theta$$

Como $\mathbb{V}$ tiene que ser máximo, entonces senθ tiene que ser 1.

$$\therefore\ \mathbb{V}_{\text{máx.}}=48$$

Respuesta

48

PREGUNTA N.º 35

En un triángulo equilátero ABC, sobre la altura $\overline{AH}$ ($H \in \overline{BC}$) se toma el punto E y en la prolongación de $\overline{AC}$ se toma el punto D ($C \in \overline{AD}$), tal que $EC=CD$ y $AC=ED$. Halle m$\sphericalangle HED$.

A) 40º B) 45º C) 48º
D) 50º E) 52º

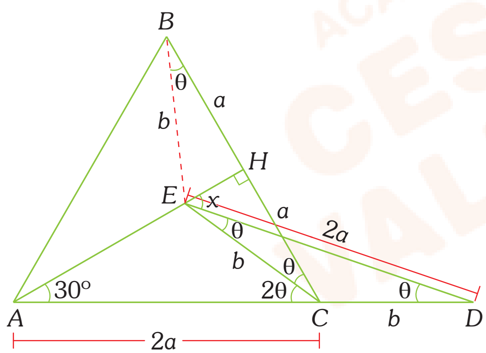
Resolución

Tema: Congruencia de triángulos

Análisis y procedimiento

Nos piden m$\sphericalangle HED=x$.

Por dato, el $\triangle ABC$ es equilátero, $EC=CD$ y $AC=ED$.



Trazamos $\overline{BE}$, entonces se observa

$\triangle ECD \cong \triangle BEC$

(L·L·L)

Si m$\sphericalangle EDC=\theta$ $\rightarrow$ m$\sphericalangle ECA=2\theta$

En C

$3\theta=60º$ $\rightarrow$ $\theta=20º$

Luego en el ◺EHC

$x=50º$

Respuesta

50º

PREGUNTA N.º 36

En un trapezoide dos ángulos interiores opuestos se diferencian en 24º. Calcule el ángulo formado por las bisectrices interiores de los otros dos ángulos.

A) 196º B) 186º C) 175º
D) 168º E) 123º

Resolución

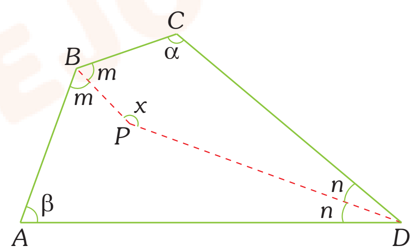
Tema: Cuadriláteros

Análisis y procedimiento

Nos piden x.

Dato: $\alpha-\beta=24º$

Sea el trapezoide $ABCD$.



En el $\triangle ABPD$

$x=m+n+\beta$ (I)

En el ⏢$BCDP$

$m+n+x+\alpha=360º$ (II)

Sumamos (I) y (II).

$2x+\alpha=\beta+360º$

$2x=360º+\underbrace{\beta-\alpha}_{-24º}$

$2x=336º$

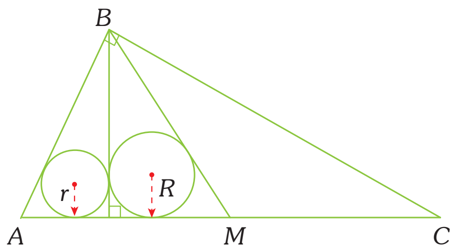
$\therefore$ $x=168º$

Respuesta

168º

PREGUNTA N.° 37

En la figura, M es punto medio de $\overline{AC}$ y las circunferencias están inscritas en los triángulos. Si $AB=K_1r$, $R=K_2r$, entonces se cumple la relación



A) $\dfrac{K_1+1}{K_2}<2$

B) $\dfrac{K_1+1}{K_2}<1$

C) $\dfrac{K_1+K_2}{K_1}<\dfrac{1}{2}$

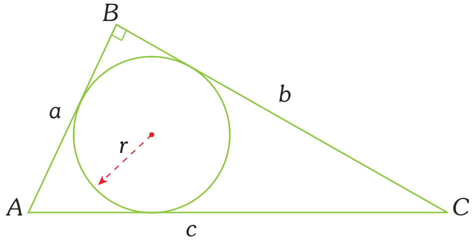
D) $\dfrac{K_1+K_2}{K_1}<2$

E) $\dfrac{K_2+1}{K_1}<\dfrac{1}{2}$

Resolución

Tema: Figuras inscritas

Teorema de Poncelet

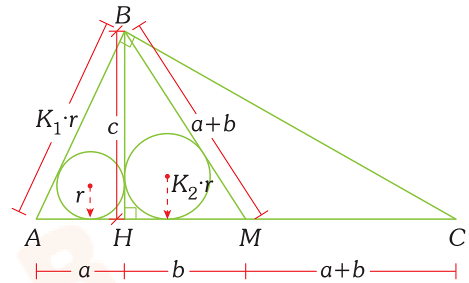


En todo triángulo rectángulo

$$\boxed{a+b=c+2r}$$

r: inradio

Análisis y procedimiento



Del ◺AHB: $c<K_1\cdot r$

Multiplicando por 2

$$2c<2K_1\cdot r \qquad \text{(I)}$$

Por teorema de Poncelet

$$a+c=K_1r+2r \quad (◺AHB)$$
$$b+c=a+b+2K_2r \quad (◺BHM) \qquad +$$
$$2c=K_1r+2K_2r+2r \qquad \text{(II)}$$

Luego (II) en (I)

$$K_1+2K_2+2<2K_1$$

$$2(K_2+1)<K_1$$

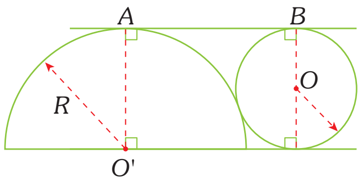
$$\therefore \ \frac{K_2+1}{K_1}<\frac{1}{2}$$

Respuesta

$\dfrac{K_2+1}{K_1}<\dfrac{1}{2}$

PREGUNTA N.° 38

En la figura mostrada, si $AB=4\sqrt{2}$ m, halle R (en metros).

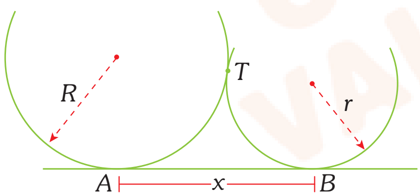


A) 2 B) 2,5 C) 3
D) 3,5 E) 4

Resolución

Tema: Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

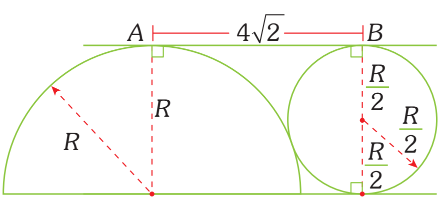
Tenga en cuenta que si A y B son puntos de tangencia



$$\boxed{x=2\sqrt{Rr}}$$

Análisis y procedimiento

Dato: $AB=4\sqrt{2}$ m



Se observa que el radio de la circunferencia menor mide $\frac{R}{2}$, entonces por teorema tenemos

$$4\sqrt{2}=2\sqrt{R\left(\frac{R}{2}\right)}$$

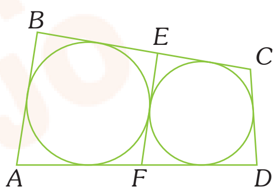
$\therefore\ R=4$

Respuesta

4

PREGUNTA N.° 39

En la figura mostrada, se tiene que $AB+CD=30$ m y $BC+AD=50$ m, calcule EF.

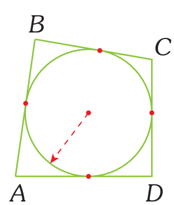


A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

Resolución

Tema: Figuras inscritas

Si $\triangle ABCD$ está circunscrito a una circunferencia, se cumple el teorema de Pitot.

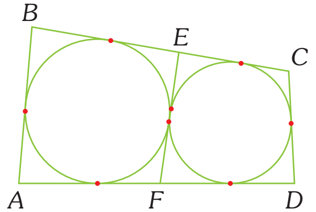


$$\boxed{AB+CD=AD+BC}$$

Análisis y procedimiento

Datos: $AB+CD=30$ m y $BC+AD=50$ m

Nos piden EF.



En el $\square ABEF$, por teorema de Pitot tenemos

$AB+EF=BE+AF$ (I)

En el $\square FECD$, por teorema de Pitot tenemos

$EF+CD=EC+FD$ (II)

Luego, de (I)+(II) se tiene

$AB+2EF+CD=BC+AD$

Reemplazamos los datos.

$30+2EF=50$

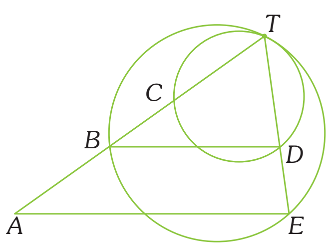
$\therefore\ EF=10$

Respuesta

10

PREGUNTA N.º 40

En el gráfico mostrado $\overline{BD}$ es paralelo a $\overline{AE}$ y T es punto de tangencia. Calcule AB (en cm), si $CT=5$ cm y $BC=3$ cm.

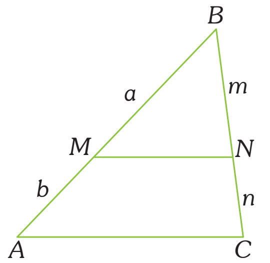


A) 2,6 B) 3,7 C) 4,8
D) 5,9 E) 6,5

Resolución

Tema: Proporcionalidad de segmentos

Corolario de Thales



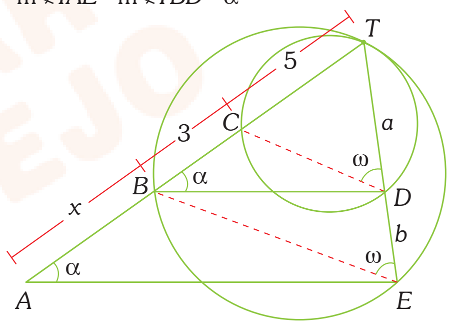
Si $\overline{MN}//\overline{AC}$, entonces

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{m}{n}}$$

Análisis y procedimiento

Por dato: $\overline{BD}//\overline{AE}$

$\rightarrow$ m$\sphericalangle TAE$=m$\sphericalangle TBD=\alpha$



Se sabe que $\overline{CD}//\overline{BE}$.

En el $\triangle ATE$, aplicamos el corolario de Thales.

$$\frac{8}{x}=\frac{a}{b} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BTE$, nuevamente aplicamos el corolario de Thales.

$$\frac{5}{3}=\frac{a}{b} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II): $\dfrac{8}{x}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ x=4,8$

Respuesta

4,8