MATEMÁTICA

PREGUNTA N.° 1

Sean los conjuntos

$$A=\left\{\overline{abcdef}_{(12)} \middle/ \begin{array}{c}\text{las cifras son consecutivas}\\ \text{y crecientes, } a>0\end{array}\right\}$$

$$B=\left\{\overline{abcdef}_{(12)} \middle/ \begin{array}{c}\text{las cifras son consecutivas}\\ \text{y decrecientes}\end{array}\right\}$$

Halle el número de elementos de $A \cup B$.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 13
E) 14

RESOLUCIÓN

Tema: Conjuntos numeración

Análisis y procedimiento

- $A=\left\{\overline{abcdef}_{(12)} \middle/ \begin{array}{c}\text{las cifras son consecutivas}\\ \text{y crecientes, } a>0\end{array}\right\}$

se debe cumplir que

$$0<a<b<c<d<e<f<12$$

Por extensión, tenemos que

$A=\{123456_{(12)};234567_{(12)},\ldots,6789(10)(11)_{(12)}\}$

$\rightarrow n(A)=6$

- $B=\left\{\overline{abcdef}_{(12)} \middle/ \begin{array}{c}\text{las cifras son consecutivas}\\ \text{y decrecientes}\end{array}\right\}$

se debe cumplir que

$$12>a>b>c>d>e>f\geq 0$$

Por extensión, tenemos que

$B=\{(11)(10)9876_{(12)},(10)98765_{(12)},\ldots,$
$654321_{(12)},543210_{(12)}\}$

$\rightarrow n(B)=7$

Se observa que A y B son disjuntos.

Nos piden

$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$

$n(A \cup B)=6+7$

$\therefore\ n(A \cup B)=13$

Respuesta: 13

PREGUNTA N.° 2

La suma de las cifras de los cuatro últimos dígitos de

$$E=2+22+\ldots+\underbrace{22\ldots2}_{51\text{ dígitos}}+3+33+\ldots+\underbrace{33\ldots3}_{51\text{ dígitos}}$$

es

A) 11 B) 13 C) 16
D) 17 E) 19

RESOLUCIÓN

Tema: Operaciones básicas en $\mathbb{Z}^+$

Análisis y procedimiento

Piden la suma de los cuatro últimos dígitos de E.

Por dato

$$E=\underbrace{2+22+\ldots+\underbrace{22\ldots2}_{51\text{ dígitos}}}_{51\text{ sumandos}}+\underbrace{3+33+\ldots+\underbrace{33\ldots3}_{51\text{ dígitos}}}_{51\text{ sumandos}}$$

Entonces

$$E = \underbrace{5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{55\ldots5}_{51\ \text{dígitos}}}_{51\ \text{sumandos}}$$

Ordenamos los sumandos en vertical.

$$\begin{array}{rrrrrl} & & & & 5 & + \\ & & & {\scriptstyle 25}5 & 5 & \\ & & {\scriptstyle 27}5 & 5 & 5 & \\ & {\scriptstyle 27}5 & 5 & 5 & 5 & \\ & & & \vdots & & \\ 5 & \ldots & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline & \ldots & 7 & 2 & 5 & 5 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\\\end{array}\right\} \ 51 \text{ sumandos}$$

En las unidades: $5\times51=255$ (lleva 25, queda 5)

En las decenas: $5\times50+25=275$ (lleva 27, queda 5)

En las centenas: $5\times49+27=272$ (lleva 27, queda 2)

En las unidades de millar:

$5\times48+27=267$ (lleva 26, queda 7)

Por lo tanto, la suma (S) pedida es

$S=7+2+5+5=19$

Respuesta: 19

PREGUNTA N.° 3

Sea r el residuo de dividir

$E=3^{3n}+3^{2n}+3^n+3$ entre 8.

Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I. $r=6$, si n es par.
II. $r=6$, si n es impar.
III. $r=2$, si n es impar.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de divisibilidad

Análisis y procedimiento

Sabemos que

$$E = 3^{3n} + 3^{2n} + 3^n + 3 = \overset{\circ}{8} + r$$

(r: residuo)

Analizamos cada caso: par e impar.

- Si n es par

  Recuerde que

  $$(\text{impar})^{(\text{par})} = \overset{\circ}{8} + 1$$

  $\rightarrow E=3^{3n}+3^{2n}+3^n+3$

  $$E = \left(\overset{\circ}{8}+1\right)+\left(\overset{\circ}{8}+1\right)+\left(\overset{\circ}{8}+1\right)+3 = \overset{\circ}{8}+6$$

  $\therefore\ r=6$

- Si n es impar

  $\rightarrow n=2k+1;\ k\in\mathbb{Z}^+$

  $$E=3^{3(2k+1)}+3^{2n}+3^{2k+1}+3$$

  $$E=3^{6k}\cdot3^3+3^{2n}+3^{2k}\cdot3+3$$

  $$E=\underbrace{\left(\overset{\circ}{8}+1\right)\left(\overset{\circ}{8}+3\right)}_{\overset{\circ}{8}+3}+\underbrace{\left(\overset{\circ}{8}+1\right)}_{\overset{\circ}{8}+1}+\underbrace{\left(\overset{\circ}{8}+1\right)3}_{\overset{\circ}{8}+3}+3$$

  $$E=\overset{\circ}{8}+2$$

  $\therefore\ r=2$

Luego

I. **Verdadera**
Por lo analizado $r=6$ si n es par.

II. **Falsa**
Por lo analizado no cumple que $r=6$ si n es impar.

III. **Verdadera**
Por lo analizado $r=2$ si n es impar.

Respuesta: I y III

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 4

Sea la fracción $\frac{a}{3}$ (a y 3 primos entre sí), con $a > 0$. Al numerador le agregamos el número $A \in \mathbb{N}$ y al denominador $2A$, se obtiene una fracción equivalente que es la mitad de la fracción original, entonces la suma de todos los valores posibles de a es:

A) 4 B) 8 C) 9
D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN

Tema: Números racionales

Análisis y procedimiento

Dada la fracción $\frac{a}{3}$

por condición

$$\frac{a+A}{3+2A} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{3}; A \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+A}{3+2A} = \frac{a}{6}$$

$$6a+6A=3a+2Aa$$

$$6A=a(2A-3)$$

$$a = \frac{6A}{2A-3}$$

$$a = \frac{6A-9+9}{2A-3}$$

$$a = 3 + \frac{9}{2A-3}$$

$2A-3$ → Es divisor entero positivo de 9.
→ 1, 3 o 9

Evaluamos
Si $2A-3=1 \rightarrow A=2 \rightarrow a=12$
Si $2A-3=3 \rightarrow A=3 \rightarrow a=6$
Si $2A-3=9 \rightarrow A=6 \rightarrow a=4$

Como a es PESI con 3, el único valor de a es 4.

Respuesta: 4

PREGUNTA N.° 5

Indique la alternativa correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado:

I. Entre dos números racionales existe al menos un número irracional.
II. El número π se puede expresar exactamente como un número racional $r = \frac{22}{7}$.
III. La suma de dos números irracionales es un número irracional.

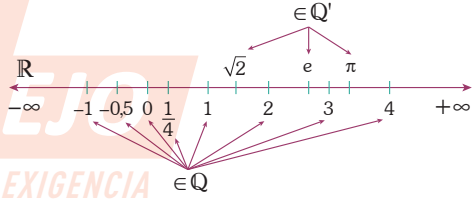
A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVF E) FFF

RESOLUCIÓN

Tema: Racionales

Análisis y procedimiento

Sean
$\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}'$: el conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales



I. **Verdadera**
Porque
- $\mathbb{Q}$ no es continuo en $\mathbb{R}$.
- La unión disjunta de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}'$ da $\mathbb{R}$, es decir,
  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \phi$
  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

II. **Falsa**
Porque
$\pi \in \mathbb{Q}'$ y $r = \frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

III. **Falsa**
Contra ejemplo
$a = \sqrt{2}+5; a \in \mathbb{Q}'$; $b = 5-\sqrt{2}; b \in \mathbb{Q}'$
Luego,
$a+b=10 \wedge 10 \in \mathbb{Q}$

Nota
La adición no cumple la ley de clausura o cerradura en $\mathbb{Q}'$.

Respuesta: VFF

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 6

Se dispone de tres recipientes cúbicos cuyos lados de longitud L_1, L_2, L_3 cumplen con la siguiente condición:

$$\frac{L_1}{1}=\frac{L_2}{2}=\frac{L_3}{3}$$

Se pretende distribuir 434 litros de agua entre los tres recipientes de modo que alcancen el mismo nivel o altura. Determine los litros de agua que recibe el recipiente de longitud L_2.

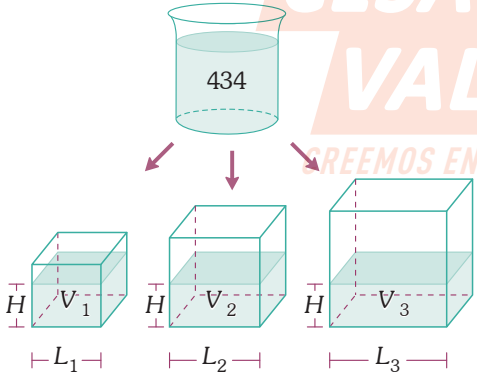
A) 112 B) 120 C) 124
D) 136 E) 146

RESOLUCIÓN

Tema: Razones - proporciones - SRGE

Análisis y procedimiento

Por condición



Donde

$$V_1=L_1^2\times H;\ V_2=L_2^2\times H;\ V_3=L_3^2\times H \qquad (I)$$

Por dato

$$\frac{L_1}{1}=\frac{L_2}{2}=\frac{L_3}{3}\rightarrow\frac{L_1^2}{1}=\frac{L_2^2}{4}=\frac{L_3^2}{9}$$

$$\rightarrow\frac{L_1^2\times H}{1}=\frac{L_2^2\times H}{4}=\frac{L_3^2\times H}{9} \qquad (II)$$

Entonces de (I) y (II), se tiene

$$\overbrace{\frac{V_1}{1}=\frac{V_2}{4}=\frac{V_3}{9}}^{+}=\frac{434}{14}=31$$

$\therefore\ V_2=4\times31=124$

Respuesta: 124

PREGUNTA N.° 7

Se elige aleatoriamente un número entero de cinco cifras. Calcule la probabilidad que dicho número sea par y la suma de sus cifras sea 42.

A) $\frac{7}{9}\times10^{-4}$ B) $\frac{11}{9}\times10^{-4}$ C) $\frac{13}{9}\times10^{-4}$
D) $\frac{11}{9}\times10^{-3}$ E) $\frac{13}{9}\times10^{-3}$

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de probabilidades

Análisis y procedimiento

Recuerde que para un evento A contenido en un espacio muestral Ω, la probabilidad (definición clásica) de que ocurra el evento A, se calcula así

$$P(A)=\frac{\text{N.° de casos favorables de } A}{\text{N.° de casos totales}}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Casos favorables

$\overline{abcde}$ es par → e es par o cero.

suman 42	0	×
suman 40	2	×
suman 38	4	×
suman 36	6	✓
suman 34	8	✓

Observación

En la base 10, la suma de 4 dígitos es como máximo 36.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

Entonces
si $e=6 \rightarrow a=b=c=d=9$

$\therefore$ hay un caso

si $e=8 \rightarrow \overline{abcd8}$

$$7999 \rightarrow P_{(4;1;3)}=\frac{4!}{1!\times 3!}=4 \text{ casos}$$

$$8899 \rightarrow P_{(4;2;2)}=\frac{4!}{2!\times 2!}=6 \text{ casos}$$

$\therefore$ (N.° de casos favorables)$=1+4+6=11$

Casos totales

$\overline{abcde}$: $\underbrace{10\,000; 10\,001; 10\,002; \ldots; 99\,999}_{90\,000 \text{ numerales}}$

Por lo tanto, la probabilidad de que al elegir al azar un número de 5 cifras, dicho número sea par y sus cifras sumen 42 es

$$P=\frac{11}{90\,000}=\frac{11}{9}\times 10^{-4}$$

Respuesta: $\frac{11}{9}\times 10^{-4}$

PREGUNTA N.° 8

Sean α, β, a, $b \in \mathbb{N}$, $N=a^{\alpha}b^{\beta}$, $M=a^{\alpha+1}b^{\beta+1}$, con a y b primos diferentes. Si N es un cubo perfecto y M es un cuadrado perfecto. Entonces indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. El número de divisores de $\sqrt[3]{N}\cdot\sqrt{M}$ es impar.
II. El producto $\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)$ es múltiplo de 36.
III. El número de divisores de $\sqrt[3]{N}\cdot\sqrt{M}$ es par.

A) VVV
B) VVF
C) FVV
D) FVF
E) FFF

RESOLUCIÓN

Tema: Números primos y compuestos

Análisis y procedimiento

Del enunciado se tiene

- $N=a^{\alpha}\times b^{\beta}$ (D.C.)
  Como N es un cubo perfecto, entonces
  $\alpha=\overset{\circ}{3} \wedge \beta=\overset{\circ}{3}$.

- $M=a^{\alpha+1}\times b^{\beta+1}$ (D.C.)
  Como M es un cuadrado perfecto, entonces
  $\alpha+1=\overset{\circ}{2} \wedge \beta+1=\overset{\circ}{2}$

$$\rightarrow \alpha=\begin{cases}\overset{\circ}{3}+③\\ \overset{\circ}{2}-1+④\end{cases} \rightarrow \alpha=\overset{\circ}{6}+3$$
$$\alpha=6k+3;\ k\in\mathbb{Z}_0^+$$

Análogamente con β se tiene

$$\beta=\overset{\circ}{6}+3$$
$$\beta=6n+3;\ n\in\mathbb{Z}_0^+$$

De donde se tiene que

$N=a^{6k+3}\times b^{6n+3}$ (D.C.)
$M=a^{6k+4}\times b^{6n+4}$ (D.C.)

y sea $P=\sqrt[3]{N}\cdot\sqrt{M}$

$$P=a^{2k+1}\times b^{2n+1}\times a^{3k+2}\times b^{3n+2}$$
$$\rightarrow P=a^{5k+3}\times b^{5n+3} \text{ (D.C.)}$$

Evaluando las proposiciones, tenemos

I. **Falsa**
CD$(P)=(5k+4)(5n+4)$
Puede ser par o impar, dependiendo de los valores que tomen k y n.

II. **Verdadera**
$\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)$
$\rightarrow (6k+3)(6n+3)(6k+4)(6n+4)$
$\rightarrow 3(2k+1)3(2n+1)2(3k+2)2(3n+2)$
$\rightarrow 36(2k+1)(2n+1)(3k+2)(3n+2)=\overset{\circ}{36}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXCELENCIA

III. **Falsa**
CD(P)=(5k+4)(5n+4)
Puede ser par o impar, dependiendo de los valores que tomen k y n.

Respuesta: FVF

PREGUNTA N.° 9

Sean las ecuaciones
$y=x^2-3x+4 \wedge y=mx+3$
Determine los valores reales de m para que nunca se intersequen.

A) $\langle -5; -1\rangle$ B) $\langle -5; 1\rangle$ C) $\langle 1; 5\rangle$
D) $\mathbb{R}\setminus[-5; -1]$ E) $\mathbb{R}\setminus\langle -5; -1\rangle$

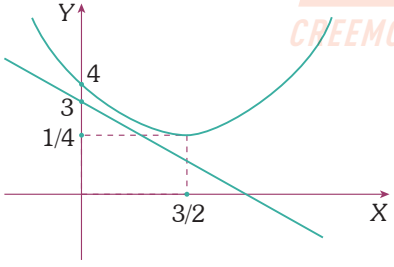
RESOLUCIÓN

Tema: Gráfica de funciones

Análisis y procedimiento

A partir de las funciones
$y=x^2-3x+4 \wedge y=mx+3$

Se tiene la representación



Como se piden los valores reales de m para que nunca se intersequen.

igualamos las expresiones
$x^2-3x+4=mx+3$
$\rightarrow x^2-(m+3)x+1=0$

Se cumple que su discriminante es negativa.
$\rightarrow (m+3)^2-4(1)(1) < 0$
$\rightarrow (m+3)^2 < 4$
$\rightarrow -2 < m+3 < 2$
$\rightarrow -5 < m < -1$

$\therefore\ m \in \langle -5; -1\rangle$

Respuesta: $\langle -5; -1\rangle$

PREGUNTA N.° 10

Si $E=\langle -\infty; 2]$ es el conjunto solución de la inecuación $|x-a| \leq |x-b|$, $0 < a < b$, entonces el menor valor de $(a+b)^2$ es:

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

RESOLUCIÓN

Tema: Valor absoluto

Análisis y procedimiento

Se tiene la inecuación $|x-a| \leq |x-b|$; $0 < a < b$
$\rightarrow (x-a)^2 \leq (x-b)^2$
$\rightarrow (x-a)^2-(x-b)^2 \leq 0$
$\rightarrow (x-a+x-b)(x-a-x+b) \leq 0$
$\rightarrow (2x-a-b)\underbrace{(b-a)}_{(+)} \leq 0$
$\rightarrow 2x-a-b \leq 0$
$\rightarrow x \leq \dfrac{a+b}{2} \rightarrow x \in \left\langle -\infty; \dfrac{a+b}{2}\right]$

Como el conjunto solución es $E=\langle -\infty; 2]$, tenemos
$\rightarrow \dfrac{a+b}{2}=2$
$\rightarrow a+b=4$

$\therefore\ (a+b)^2=16$

Observación
El valor de $(a+b)$ es único.

Respuesta: 16

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 11

Sea $A=\{z\in\mathbb{C}: 4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15\}$

Halle $z_0\in A$ tal que $|z_0|$ sea mínimo.

A) -1 B) 1 C) i
D) $-7i$ E) 7

RESOLUCIÓN

Tema: Números complejos

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$A=\{z\in\mathbb{C}: \underbrace{4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15}_{(I)}\}$$

Graficamos A

De (I)

$$4\left(|z|^2-3(z+\bar{z})+9\right)=|z|^2+15$$

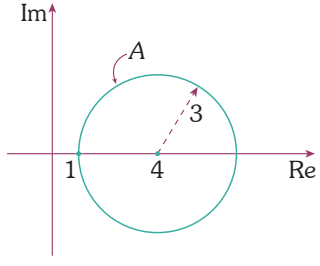
$$3|z|^2-12(z+\bar{z})+21=0$$

$$|z|^2-4(z+\bar{z})+7=0 \qquad (II)$$

Ahora, sea $z=x+yi$ en (II)

$$x^2+y^2-8x+7=0$$

$$(x-4)^2+y^2=3^2$$



En la gráfica, $z_0\in A$.

Entonces, $|z_0|$ mínimo es $z_0=1$.

Respuesta: 1

PREGUNTA N.° 12

Dados a; $b\in\mathbb{R}$ y los problemas de programación lineal

mín $ax+by$ (1) máx $ax+by$ (2)
sa $(x; y)\in D$ sa $(x; y)\in D$

Sea $(x_0; y_0)$ solución del problema (1). Señale la alternativa correcta después de determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $(-x_0; -y_0)$ es solución del problema (2).
II. Si $D\neq\phi$, entonces la solución de los problemas (1) y (2) son distintas.
III. Si las soluciones de los problemas (1) y (2) coinciden, entonces $D=\{(x_0; y_0)\}$.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FFV E) FFF

RESOLUCIÓN

Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

Analizamos las proposiciones.

I. **Falso**

Si $(x_0; y_0)$ es solución de (1) y $(x_0; y_0)\in$ IC,

entonces, $(-x_0; -y_0)\in$ IIIC.

$\therefore$ $(-x_0; -y_0)$ no es solución del problema (2).

II. **Falso**

Si $D=\{(x'; y')\}$, entonces

mín $ax+by=$máx $ax+by$.

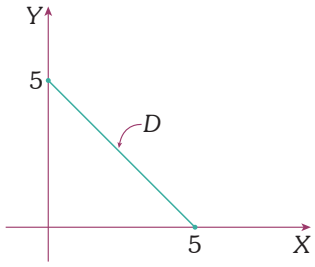
III. **Falso**

Si tenemos que

$$D=\begin{cases}x+y\leq 5\\ x+y\geq 5\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases};\ z=4x+4y$$

al resolver tenemos que

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA



$\rightarrow$ máx $z=20 \wedge$ mín $z=20$. Las soluciones de (1) y (2) coinciden, pero $D \neq \{(x_0; y_0)\}$ (D es segmento)

Respuesta: FFF

PREGUNTA N.° 13

Sean f: $[2; 4] \rightarrow A$, $f_{(x)}=1-2x$ biyectiva y

g: $A \rightarrow B$, $g_{(x)} = \dfrac{7}{x+1}$ biyectiva.

Determine B.

A) $\left[-\dfrac{7}{2}; -\dfrac{7}{6}\right]$

B) $[-7; -3]$

C) $\left[-\dfrac{21}{2}; -\dfrac{25}{6}\right]$

D) $\left[-21; -\dfrac{25}{3}\right]$

E) $[2; 4]$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Tenemos

- f: $[2; 4] \rightarrow A$; $f_{(x)}=1-2x$

Como f es biyectiva, $A=\text{Ran}(f)$.

De $2 \leq x \leq 4$

$-7 \leq 1-2x \leq -3$

Luego,

$\text{Ran}(f)=A=[-7; -3]$

- g: $A \rightarrow B$, $g(x) = \dfrac{7}{x+1}$

Como g es biyectiva

$A=\text{Dom}(g) \wedge B=\text{Ran}(g)$

$\rightarrow A=[-7; -3]$

$\rightarrow -7 \leq x \leq -3$ $\xrightarrow{+1}$

$-6 \leq x+1 \leq -2$ $\xrightarrow{\text{invertimos}}$

$-\dfrac{1}{6} \geq \dfrac{1}{x+1} \geq -\dfrac{1}{2}$ $\xrightarrow{\times(7)}$

$-\dfrac{7}{6} \geq \dfrac{7}{x+1} \geq -\dfrac{7}{2}$

$-\dfrac{7}{2} \leq \dfrac{7}{x+1} \leq -\dfrac{7}{6}$

$-\dfrac{7}{2} \leq g(x) \leq -\dfrac{7}{6}$

$\therefore\ B = \left[-\dfrac{7}{2}; -\dfrac{7}{6}\right]$

Respuesta: $\left[-\dfrac{7}{2}; -\dfrac{7}{6}\right]$

PREGUNTA N.° 14

Al efectuar la división

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}$$

el término independiente del cociente que resulta es

A) $-2n$ B) $-n$ C) 0

D) n E) $2n$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXCELENCIA

RESOLUCIÓN

Tema: División algebraica

Análisis y procedimiento

En la división indicada

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}$$

Aplicamos la regla de Ruffini.

$(n+2)$ términos

	1	0	0	...	0	$-(n+1)$	n
$x=1$	↓	1	1	...	1	1	$-n$
	1	1	1	...	1	$-n$	0

$\rightarrow q_{(x)}=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+...+x-n$

Por lo tanto, el término independiente de $q_{(x)}$ es $-n$.

Respuesta: $-n$

PREGUNTA N.° 15

Sean a; b; $c \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b < c$ y $x_1 < x_2$. Siendo $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ soluciones del sistema de ecuaciones

$y=ax^2+bx+c$

$y=cx^2+bx+a$

entonces podemos afirmar que

A) $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$

B) $x_1, x_2 < 0; y_1, y_2 > 0$

C) $x_1, x_2 > 0; y_1, y_2 > 0$

D) $x_1 < 0; x_2, y_1, y_2 > 0$

E) $x_1 > 0; y_1, y_2 < 0$

RESOLUCIÓN

Tema: Sistema de ecuaciones no lineales

Análisis y procedimiento

Se tiene $0 < a < b < c \rightarrow c-b > 0$

$(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son soluciones del sistema.

$y=ax^2+bx+c$

$y=cx^2+bx+a$

De

$ax^2+bx+c=cx^2+bx+a$

$(a-c)x^2=a-c;\ a-c\neq 0$

$x^2=1$

Si

$x=1 \rightarrow y=a+b+c$

$x=-1 \rightarrow y=a-b+c$

Luego, las soluciones son

$(-1; a-b+c)$ y $(1; a+b+c)$

Como $x_1 < x_2$

$\rightarrow x_1=-1;\ y_1=a-b+c > 0\ \ (c-b > 0 \wedge a > 0)$

$\rightarrow x_2=1;\ y_2=a+b+c > 0\ \ (c > b > a > 0)$

$\therefore\ x_1 < 0;\ x_2, y_1, y_2 > 0$

Respuesta: $x_1 < 0; x_2, y_1, y_2 > 0$

PREGUNTA N.° 16

Determine los puntos de intersección de la gráfica de la función definida por $f_{(x)} = |x-2|+x^2$ con la recta $3x-2y=-11$.

A) $(-1; 2), (3; 9)$
B) $(1; -4), (3; 10)$
C) $(-1; 4), (3; 10)$
D) $(-1; 1), (4; 9)$
E) $(1; -4), (3; 12)$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

RESOLUCIÓN

Tema: Gráfica de funciones

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$y=f_{(x)}=|x-2|+x^2$$

$$3x-2y=-11 \rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$

Igualando ordenadas

$$|x-2|+x^2=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}\rightarrow|2x-4|=-2x^2+3x+11$$

$$\rightarrow 2x-4=-2x^2+3x+11 \vee 2x-4=2x^2-3x-11$$

$$0=2x^2-x-15 \vee 0=2x^2-5x-7$$

$$(2x+5)(x-3) \qquad (2x-7)(x+1)$$

$$0=(2x+5)(x-3) \vee 0=(2x-7)(x+1)$$

$$\underbrace{x=-\frac{5}{2}}_{\text{(no cumple)}} \vee \underbrace{x=3}_{\text{(sí cumple)}} \qquad \underbrace{x=-\frac{7}{2}}_{\text{(no cumple)}} \vee \underbrace{x=-1}_{\text{(sí cumple)}}$$

Luego

si $x=3 \rightarrow f_{(3)}=10=y \rightarrow (x; y)=(3; 10)$

si $x=-1 \rightarrow f_{(-1)}=4=y \rightarrow (x; y)=(-1; 4)$

Por lo tanto, los puntos de intersección son (3; 10), (–1; 4).

Respuesta: (–1; 4), (3; 10)

PREGUNTA N.° 17

Halle el valor de x si

$$\begin{cases}\log x=\log 1024-3\log 2-\log y\\ 2^{x-y}=256\end{cases}$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 24

RESOLUCIÓN

Tema: Logaritmos

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$\log x=\log 1024-3\log 2-\log y$$

$$\log x+\log y=\log 1024-\log 8$$

$$\log xy=\log 128 \rightarrow xy=128$$

Además

$$2^{x-y}=256=2^8 \rightarrow x-y=8$$

Se forma el sistema

$$\begin{cases}xy=128;\ x>0 \wedge y>0\\ x-y=8\end{cases}$$

Entonces $x=16$; $y=8$

Por lo tanto, el valor de x es 16.

Respuesta: 16

PREGUNTA N.° 18

Determine la traza de A, si se cumple que

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \text{ y } (A-I)^2=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

A) 1 B) 5/4 C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Matrices

Análisis y procedimiento

$$(A+I)^2-(A-I)^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-\left[-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXCELENCIA

$$4A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ traza}(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Respuesta: 1

PREGUNTA N.° 19

Considere la progresión aritmética

$\overline{3a}_{(n)}; 43_{(n+1)}; \overline{4a}_{(n+2)}; \ldots$

donde la suma de los tres primeros términos es mayor que 170. Si n es el menor posible, calcule la suma de los primeros 12 términos de esta progresión.

A) 1150 B) 1330 C) 1340
D) 1350 E) 1650

RESOLUCIÓN

Tema: Sucesiones

Análisis y procedimiento

Se tiene la progresión aritmética (PA).

$\overline{3a}_n; 43_{(n+1)}; \overline{4a}_{(n+2)}; \ldots$ (razones: r, r)

$(3n+a); (4n+7); (4n+8+a); \ldots$ (razones: r, r)

La suma de los 3 términos en función del término central y la razón (r).

$$(4n+7-r)+(4n+7)+(4n+7+r)=12n+21$$

$$3(4n+7)=12n+21$$

Por dato se sabe que

$$12n+21>170$$

$$12n>149$$

$$n>12{,}4\ldots$$

En toda PA se cumple

$$2\times(2.^{\text{o}}\text{ término})=(1.^{\text{er}}\text{ término})+(3.^{\text{er}}\text{ término})$$

$$2\times(4n+7)=(3n+a)+(4n+8+a)$$

$$8n+14=7n+2a+8$$

$$\underset{14}{n}+6=2\,\underset{10}{a}$$

Por dato n es mínimo

Luego, la PA inicial sería

$41; 52; 63; 74; \ldots; a_{12}; \ldots$ (razones: 11, 11, 11)

Su término general es

$a_n=11n+41$

Entonces el término doce es

$$a_{12}=11\times12+41$$

$$a_{12}=173$$

Nos piden, la suma de los 12 primeros términos de la PA.

$$S_{12}=\frac{(a_1+a_{12})}{2}\times12$$

$$S_{12}=\frac{(52+173)}{2}\times12$$

$$\therefore S_{12}=1350$$

Respuesta: 1350

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXCELENCIA

PREGUNTA N.° 20

Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$S_n = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| = n+1\}$ y

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \sqrt{3}\}$

Determine la suma de los valores de n, de tal forma que se cumpla $S_n \subseteq A$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Tema: Valor absoluto

Análisis y procedimiento

Tenemos que

- $S_n = \{x \in \mathbb{R}: |2x-1| = n+1\}; n \in \mathbb{N}$

  $\rightarrow 2x-1 = n+1 \vee 2x-1 = -n-1$

  $x = \dfrac{n+2}{2} \quad \vee \quad x = \dfrac{-n}{2}$

  $\rightarrow S_n = \left\{\dfrac{n+2}{2}; \dfrac{-n}{2}\right\}$

- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \sqrt{3}\} = \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\rangle$

  Como $S_n \subseteq A$

  $\rightarrow \left\{\dfrac{n+2}{2}; \dfrac{-n}{2}\right\} \subseteq \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\rangle$

Esto es

$$-\sqrt{3} < \frac{n+2}{2} < \sqrt{3} \rightarrow -2\sqrt{3}-2 < n < 2\sqrt{3}-2 \quad \text{(I)}$$

$$-\sqrt{3} < \frac{-n}{2} < \sqrt{3} \rightarrow -2\sqrt{3} < n < 2\sqrt{3} \quad \text{(II)}$$

(I) $\cap$ (II)

$-2\sqrt{3} < n < 2\sqrt{3} - 2$ como $n \in \mathbb{N} \rightarrow n = 1$

Por lo tanto, la suma de valores de n es 1.

Respuesta: 1

PREGUNTA N.° 21

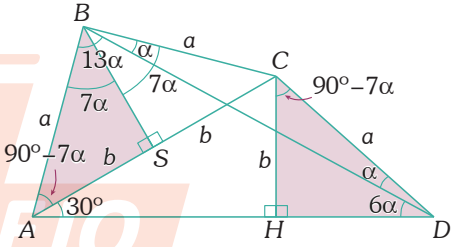
En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se verifica que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$. Si $m\measuredangle ABD = 13m\measuredangle DBC$ y $m\measuredangle ADB = 6m\measuredangle DBC$, halle $m\measuredangle DBC$.

A) 2° B) 3° C) 4°
D) 5° E) 6°

RESOLUCIÓN

Tema: Congruencia de triángulos

Análisis y procedimiento



Piden

$m\measuredangle DBC = \alpha$.

$\triangle ABC$ isósceles

$\rightarrow m\measuredangle BAS = 90° - 7\alpha$

$AS = SC = b$

$\triangle ASB \cong \triangle CHD$ (ALA)

$\rightarrow AS = CH = b$

$\triangle AHC$ notable

$\rightarrow m\measuredangle CAH = 30°$

$\triangle ABD$ ($S\, m\measuredangle i = 180°$)

$\therefore \alpha = 5°$

Respuesta: 5°

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 22

Determine la longitud (en cm) del lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia C de radio R cm si la longitud del lado de un polígono de doble número de lados inscrito en C es igual a $\frac{R}{2}$ cm.

A) $\frac{\sqrt{15}}{2}R$

B) $\frac{\sqrt{15}}{3}R$

C) $\frac{\sqrt{15}}{4}R$

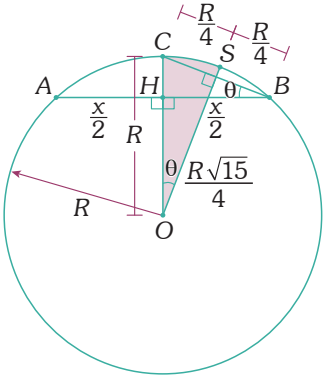
D) $\frac{\sqrt{15}}{5}R$

E) $\frac{\sqrt{15}}{6}R$

RESOLUCIÓN

Tema: Polígonos regulares

Análisis y procedimiento



Piden $AB=x$.

Tenemos como condición que $BC=\frac{R}{2}$.

AB=longitud del lado de un polígono regular

CB=longitud del lado de un polígono regular de doble número de lados.

$\triangle CSO$: teorema de Pitágoras

$$OS=\frac{R\sqrt{15}}{4}$$

$\triangle OSC \sim \triangle BHC$

$$\frac{HB}{OS}=\frac{CB}{CO}\rightarrow\frac{\frac{x}{2}}{\frac{R\sqrt{15}}{4}}=\frac{\frac{R}{2}}{R}$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{15}}{4}R$$

Respuesta: $\frac{\sqrt{15}}{4}R$

PREGUNTA N.° 23

En un triángulo ABC, se traza $\overline{BM}\,(M\in\overline{AC})$ tal que $AM=\frac{3}{4}MC$, por M se traza $\overline{MH}\perp\overline{BC}\,(H\in\overline{BC})$ y por A se traza $\overline{AE}\perp\overline{BM}\ (E\in\overline{BM})$. Si $MH=8$ u, $AE=6\sqrt{3}$ u y $m\measuredangle MBC=30°$, calcule el área del triángulo MHC (en u^2).

A) $30\sqrt{3}$

B) $32\sqrt{3}$

C) $34\sqrt{3}$

D) $36\sqrt{3}$

E) $38\sqrt{3}$

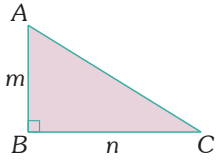
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

RESOLUCIÓN

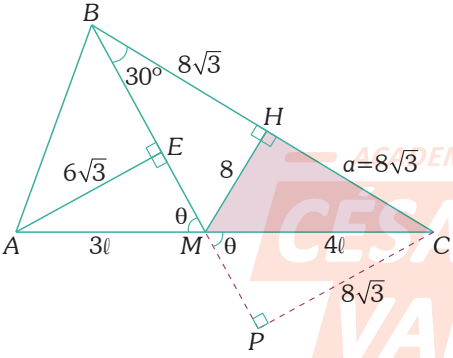
Tema: Áreas de regiones triangulares

Análisis y procedimiento

Recuerde



$$A(\triangle ABC)=\frac{m\cdot n}{2}$$



Piden

$A(\triangle MHC)=S$

$S=\dfrac{8\cdot a}{2}\rightarrow S=4a$

$\triangle MHB$: $BH=8\sqrt{3}$

$\overline{CP}\perp\overline{BM}$

$\rightarrow \triangle AEM\sim\triangle CPM$

$CP=8\sqrt{3}$

$\triangle CPB$: $CB=16\sqrt{3}$

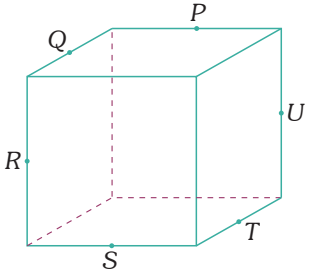
$\rightarrow a=8\sqrt{3}$

$\therefore\ S=32\sqrt{3}$

Respuesta: $32\sqrt{3}$

PREGUNTA N.° 24

La figura representa un cubo de arista a cm. Calcule el área (en cm^2) de la circunferencia que pasa por los puntos P, Q, R, S, T, U; teniendo en cuenta que son puntos medios de las aristas.



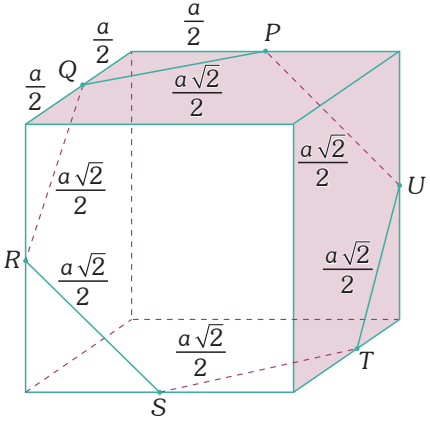
A) πa^2 B) $\dfrac{\pi a^2}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi a^2$

RESOLUCIÓN

Tema: Poliedros regulares

Análisis y procedimiento



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXCELENCIA

Sea r el radio de la circunferencia que pasa por los puntos P, Q, R, S, T y U.

Nos piden

$$\mathbb{A}_{\odot}=\pi r^2 \qquad (*)$$

Como P, Q, R, S, T y U son puntos medios, entonces, el hexágono $PQRSTU$ es regular.

$$\rightarrow PQ=\ell_6=r=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazamos en (*)

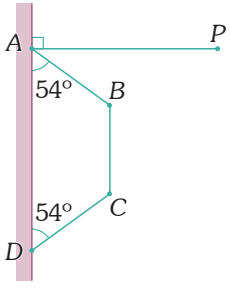
$$\mathbb{A}_{\odot}=\frac{\pi a^2}{2}$$

Respuesta: $\frac{\pi a^2}{2}$

PREGUNTA N.° 25

En la figura se tiene una plataforma rígida $ABCD$ en forma de trapecio tal que $AB=DC=2BC=20$ cm y una cuerda AP, calcule (en cm) la longitud recorrida por el extremo P, hasta que haga contacto con $\overline{DC}$, sabiendo que $AP=40$ cm.

A) 14π
B) 15π
C) 16π
D) 17π
E) 18π

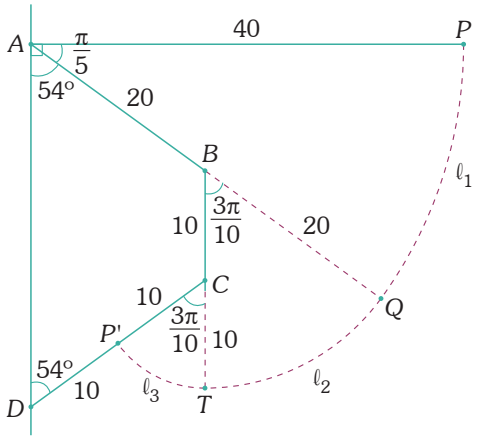


RESOLUCIÓN

Tema: Circunferencia

Análisis y procedimiento

Piden la longitud recorrida por el extremo P.
$(\ell_1+\ell_2+\ell_3)$



Como

$$m\sphericalangle DAQ=54^\circ \rightarrow m\sphericalangle QAP=36^\circ$$

$$\rightarrow m\sphericalangle QAP=\frac{\pi}{5}$$

$$\rightarrow \ell_1=\frac{\pi}{5}\cdot 40 \rightarrow \ell_1=8\pi$$

Como

$$\overline{BC}//\overline{AD} \rightarrow m\sphericalangle QBC=54^\circ$$

$$\rightarrow m\sphericalangle QBC=\frac{3\pi}{10}$$

$$\rightarrow \ell_2=\frac{3\pi}{10}\cdot 20 \rightarrow \ell_2=6\pi$$

Además

$$m\sphericalangle DCT=\frac{3\pi}{10} \rightarrow \ell_3=\frac{3\pi}{10}\cdot 10$$

$$\rightarrow \ell_3=3\pi$$

$$\therefore \ell_1+\ell_2+\ell_3=17\pi$$

Respuesta: 17π

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 26

En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica un punto H, por dicho punto se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a $\overline{AC}$, la cual interseca a $\overline{AB}$ en Q. Si $m\measuredangle PAB=53°$, $m\measuredangle ACB=143°$, $AP=AB$ y $AH=12$ m. Calcule HC (en m).

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

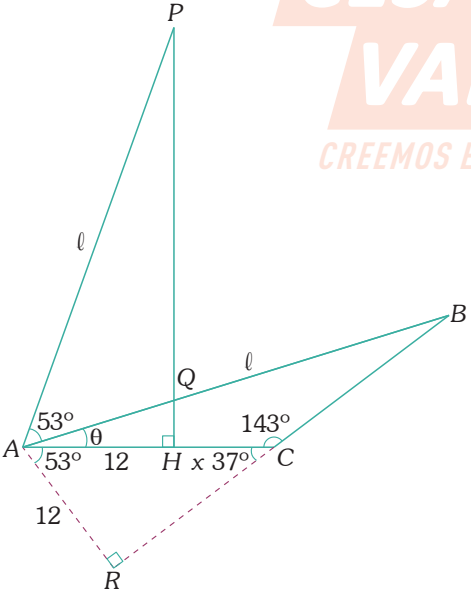
RESOLUCIÓN

Tema: Congruencia de triángulos

Análisis y procedimiento

Piden $HC=x$.

Dato: $AP=AB$; $AH=12$



Trazamos $\overline{AR}\perp\overline{BC}$.

$m\measuredangle PAH = m\measuredangle BAR = 53° + \theta$

$\rightarrow \triangle AHP \cong \triangle ARB$

$\rightarrow AH=AR=12$

Además

$\triangle ARC$: not 37° y 53°

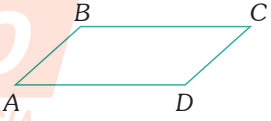
$\rightarrow 12+x=20$

$\therefore x=8$

Respuesta: 8

PREGUNTA N.° 27

En el paralelogramo $ABCD$ mostrado en la figura, $\overline{BD}\perp\overline{DC}$. Se ubica un punto P, en el interior del triángulo ABD, de modo que $(AP)^2+(PC)^2=55$ y $(PB)^2+2(CD)^2=30$. Calcule PD.



A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

RESOLUCIÓN

Tema: Relaciones métricas

Análisis y procedimiento

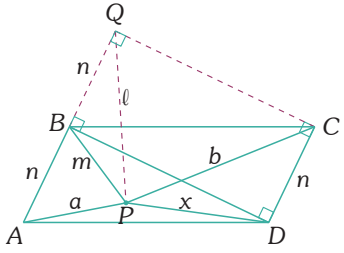
Datos

$(AP)^2+(PC)^2=55$

$(PB)^2+2(CD)^2=30$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

Nos piden calcular PD.



Del dato

$a^2+b^2=55$

$m^2+2n^2=30$

$\triangle APQ$ (teorema de la mediana)

$a^2+\ell^2=2m^2+2n^2$ (I)

$\square BQCD$ (teorema de Marlen)

$\ell^2+x^2=m^2+b^2$ (II)

De (I) y (II)

$a^2-x^2=m^2+2n^2-b^2$

$\rightarrow x^2=25$

$\therefore x=5$

Respuesta: 5

PREGUNTA N.° 28

Desde el punto de vista P, se trazan rectas secantes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ a una circunferencia C. $\mathscr{L}_1$ corta a C en A y B ($AP > BP$), $\mathscr{L}_2$ corta a C en E y D ($EP > DP$). Si $AB=10$ cm, $ED=8$ cm y $BP+DP=6$ cm, determine la longitud (en cm) de $\overline{BP}$.

A) 2,8 B) 2,9 C) 3,0
D) 3,1 E) 3,2

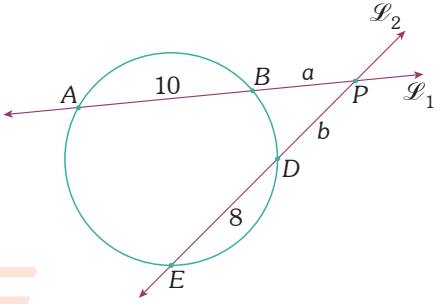
RESOLUCIÓN

Tema: Relaciones métricas en la circunferencia

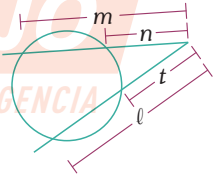
Análisis y procedimiento

Nos piden $BP=a$.

Por dato tenemos que $a+b=6$.



Recuerde que



$m\cdot n=\ell t$

En el problema

$(10+a)a=(8+b)b$

$10a-8b=b^2-a^2=\underbrace{(b+a)}_{6}(b-a)$

$\rightarrow 8a=7b \rightarrow a=7k;\ b=8k$

$15k=6 \quad k=0{,}4$

$a=7\times(0{,}4)$

$\therefore a=2{,}8$

Respuesta: 2,8

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 29

En el ángulo triedro trirrectángulo $O\text{-}ABC$; si las áreas de las caras OAB, OBC y OAC miden respectivamente $\mathbb{S}$, $2\mathbb{S}$ y $3\mathbb{S}$. Entonces el área de la región que determina un plano secante a las aristas y que pasa A, B y C es

A) $2\mathbb{S}\sqrt{2}$ B) $3\mathbb{S}\sqrt{2}$ C) $\mathbb{S}\sqrt{14}$
D) $2\mathbb{S}\sqrt{3}$ E) $\mathbb{S}\sqrt{15}$

RESOLUCIÓN

Tema: Ángulo triedro

Análisis y procedimiento

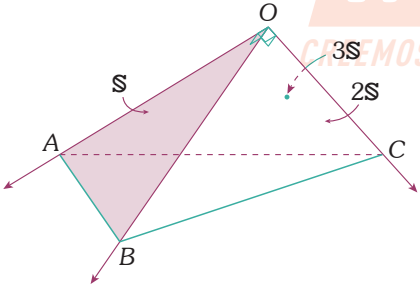
Tenemos los siguientes datos:

$\mathbb{A}_{OAB}=\mathbb{S}$

$\mathbb{A}_{OBC}=2\mathbb{S}$

$\mathbb{A}_{OAC}=3\mathbb{S}$

Nos piden $\mathbb{A}_{ABC}$.



Como el triedro es trirrectángulo

$\rightarrow \mathbb{A}^2_{ABC} = \mathbb{A}^2_{OAB} + \mathbb{A}^2_{OBC} + \mathbb{A}^2_{OAC}$

$\rightarrow \mathbb{A}^2_{ABC} = (\mathbb{S})^2 + (2\mathbb{S})^2 + (3\mathbb{S})^2$

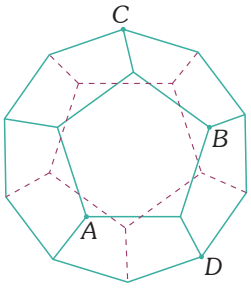
$\therefore \mathbb{A}_{ABC} = \mathbb{S}\sqrt{14}$

Respuesta: $\mathbb{S}\sqrt{14}$

PREGUNTA N.° 30

La figura mostrada es un dodecaedro regular. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A) 30°
B) 36°
C) 45°
D) 60°
E) 72°



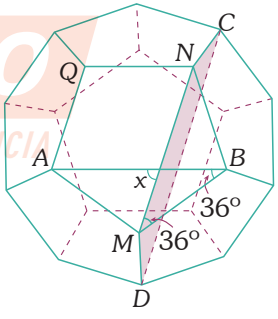
RESOLUCIÓN

Tema: Poliedros regulares

Análisis y procedimiento

Nos piden calcular x.

x: medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



En el gráfico, tenemos que

$\square DMNC$ es un trapecio isósceles.

$\rightarrow \overline{MN} // \overline{DC}$

Además, $AQNBM$ es un pentágono regular.

$\therefore x=72°$

Respuesta: 72

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 31

La superficie lateral de un prisma recto regular triangular es un rectángulo cuya diagonal mide 12 m y su altura $6\sqrt{3}$ m. Calcule el área total del sólido (en m^2).

A) $38\sqrt{3}$ B) $39\sqrt{3}$ C) $40\sqrt{3}$
D) $41\sqrt{3}$ E) $42\sqrt{3}$

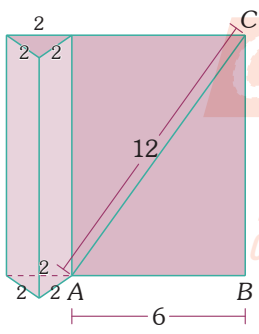
RESOLUCIÓN

Tema: Prisma

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{A}_{ST}$.

$\mathbb{A}_{ST}$: área de la superficie total del prisma regular.



El prisma es regular, por lo tanto, su base es un triángulo equilátero.

$$\mathbb{A}_{ST}=\mathbb{A}_{SL}+2\mathbb{A}_{base}$$

$$\mathbb{A}_{base}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$$

$$\mathbb{A}_{SL}=6\times 6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$$

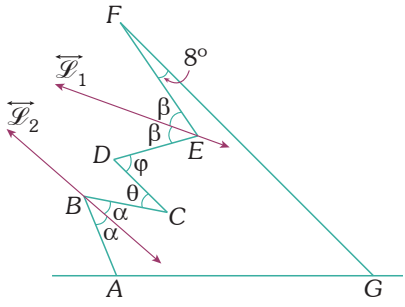
$$\mathbb{A}_{ST}=36\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{ST}=38\sqrt{3}$$

Respuesta: $38\sqrt{3}$

PREGUNTA N.° 32

En el gráfico $\overline{AB}//\overline{FG}$ y $\varphi-\theta=38°$. Determine la medida del ángulo formado por $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$.



A) 15° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 60°

RESOLUCIÓN

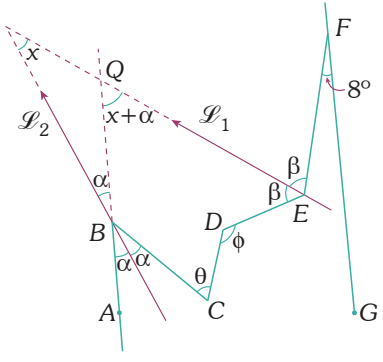
Tema: Ángulos determinados por dos rectas paralelas con una secante

Análisis y procedimiento

Piden x.

x: medida del ángulo entre $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$.

Dato: $\phi-\theta=38°$



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

$\overline{AB} // \overline{GF}$ entonces

$m\measuredangle QEF=\beta=x+\alpha+8^\circ$

$\rightarrow \beta-\alpha=x+8^\circ$ (I)

$\overline{AB} // \overline{GF}$ entonces

$2\alpha+\phi+8^\circ=\theta+2\beta$

$\rightarrow \phi-\theta+8^\circ=2(\beta-\alpha)$ (II)

Como $\phi-\theta=38^\circ$ (dato)

De (I)

$\beta-\alpha=x+8$

Reemplazamos en (II)

$38^\circ+8^\circ=2(x+8^\circ)$

$\therefore\ x=15^\circ$

Respuesta: 15°

PREGUNTA N.° 33

Al eliminar α y β de las igualdades

$p\,\text{sen}^2(\alpha)+q\cos^2(\alpha)=a$

$q\,\text{sen}^2(\beta)+p\cos^2(\beta)=b$

$p\tan(\alpha)=q\tan(\beta)$

donde $p\neq q$, obtenemos

A) $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

B) $p+q=a+b$

C) $p-q=a-b$

D) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

E) $a+p=q+b$

RESOLUCIÓN

Tema: Identidades trigonométricas fundamentales

Análisis y procedimiento

Nos piden eliminar α y β de las igualdades dadas.

- $p\cdot\text{sen}^2\alpha+q\cdot\cos^2\alpha=a;\ p\neq q$

  $(p-a)\cdot\tan^2\alpha=a-q$

  $\tan^2\alpha=\frac{a-q}{p-a}$ (I)

- $q\cdot\text{sen}^2\beta+p\cdot\cos^2\beta=b;\ p\neq q$

  $(q-b)\cdot\tan^2\beta=b-p$

  $\tan^2\beta=\frac{b-p}{q-b}$ (II)

- $p\cdot\tan\alpha=q\cdot\tan\beta;\ p\neq q$

  $p^2\cdot\tan^2\alpha=q^2\cdot\tan^2\beta$ (III)

(I) y (II) en (III)

$$p^2\cdot\left(\frac{a-q}{p-a}\right)=q^2\cdot\left(\frac{b-p}{q-b}\right)$$

Operando

$$abpq\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Respuesta: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

PREGUNTA N.° 34

Sea f: $[-\pi;\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$f_{(x)}=\cos^4(x)+\text{sen}^2(x)-1$

¿En cuántos puntos el gráfico de esta función interseca al eje de las abscisas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas directas

Análisis y procedimiento

$f_{(x)}$ intersecta al eje $x \rightarrow f_{(x)}=0$

$$\cos^4 x+\text{sen}^2 x-1=0$$

$$\cos^4 x-\cos^2 x=0$$

$$\cos^2 x\left(\cos^2 x-1\right)=0$$

$$\cos^2 x(\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

$$\cos x=0 \rightarrow x=-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x+1=0 \rightarrow \cos x=-1 \rightarrow x=-\pi;\pi$$

$$\cos x-1=0 \rightarrow \cos x=1 \rightarrow x=0$$

Cinco soluciones para $x \in [-\pi;\pi]$.

Por lo tanto, $f_{(x)}$ interseca al eje x en 5 puntos.

Respuesta: 5

PREGUNTA N.° 35

Las funciones arccos y arctan se intersecan en el punto P. Calcule la abscisa de P.

A) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

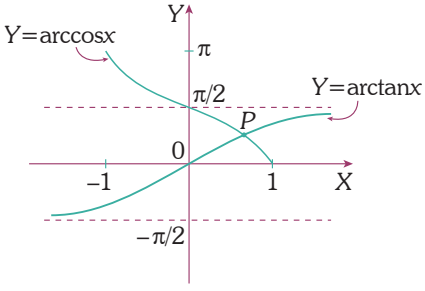
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

E) $\frac{2\sqrt{5}+7}{2}$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas inversas

Análisis y procedimiento



En el punto P

$$\underbrace{\arccos x}_{\alpha}=\underbrace{\arctan x}_{\alpha}$$

$$\rightarrow \cos\alpha=x \wedge \tan\alpha=x$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{x}$$

Como

$$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$$

$$\frac{1}{x^2}=1+x^2$$

$$1=x^2+x^4$$

Completando cuadrados.

$$\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x^2+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como $x^2 \geq 0$

$$\rightarrow x^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

Como la abscisa de P es positiva, tenemos

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$$

Respuesta: $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

PREGUNTA N.° 36

En el intervalo $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right\rangle$, determine todos los valores de α donde se cumple $\csc(\alpha) > \cot(\alpha)$.

A) $\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$

B) $\left\langle 2\pi;\frac{5\pi}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{9\pi}{4};\frac{5\pi}{2}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle 2\pi;\frac{9\pi}{4}\right\rangle$

E) $\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle\cup\left\langle 2\pi;\frac{5\pi}{2}\right\rangle$

RESOLUCIÓN

Tema: Inecuaciones trigonométricas

Análisis y procedimiento

Nos piden los valores de α partir de la inecuación dada.

Analizamos la inecuación en el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right\rangle$$

$$\rightarrow \csc\alpha > \cot\alpha$$

$$\underbrace{\csc\alpha-\cot\alpha}>0$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}>0$$

Luego

$$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\ \vee\ \pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}$$

$$0<\alpha<\pi\ \vee\ 2\pi<\alpha<3\pi \qquad \text{(I)}$$

Debido a que

$$\frac{\pi}{2}\le\alpha<\frac{5\pi}{2} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{\pi}{2}\le\alpha<\pi\ \vee\ 2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$$

Por lo tanto, los valores de α son

$$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle\cup\left\langle 2\pi;\frac{5\pi}{2}\right\rangle$$

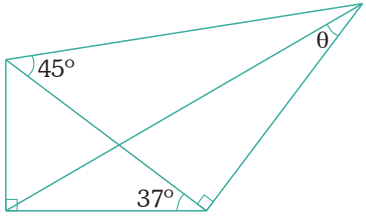
Observación

En la clave E se debe considerar cerrado en $\frac{\pi}{2}$.

Respuesta: $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle\cup\left\langle 2\pi;\frac{5\pi}{2}\right\rangle$

PREGUNTA N.° 37

Dada la figura



calcule $37\tan(\theta)$.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

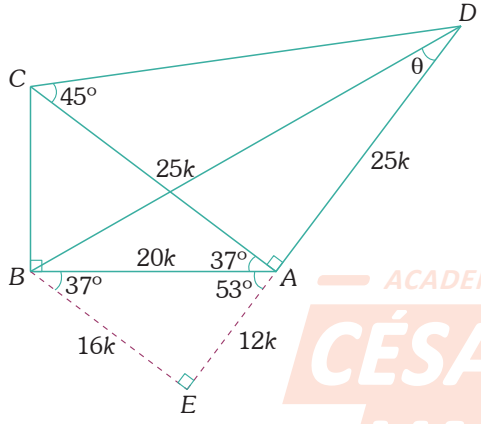
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

RESOLUCIÓN

Tema: Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Análisis y procedimiento

Tenemos el siguiente gráfico.



Se traza $\overline{BE} \perp$ a la prolongación de $\overline{DA}$.

En $\triangle ABC$: $AB=4a$

En $\triangle AEB$: $AB=5b$

$\rightarrow$ $AB=20k$, $BE=16k$, $AE=12k$

$AC=25k$, $AD=25k$

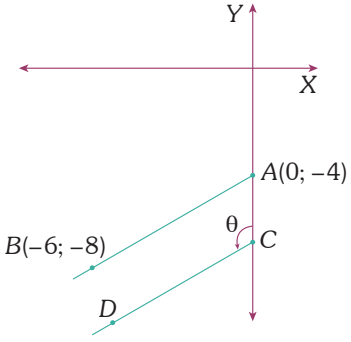
$\triangle BED$: $\tan\theta = \dfrac{16\cancel{k}}{37\cancel{k}}$

$\therefore$ $37\tan\theta=16$

Respuesta: 16

PREGUNTA N.° 38

En el gráfico mostrado si $AB // CD$, entonces el valor de $\tan(\theta)$ es



A) $-\dfrac{3}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $-\dfrac{1}{3}$

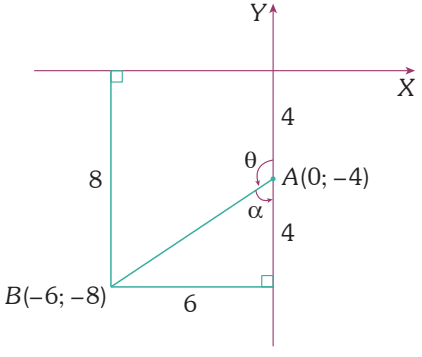
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

RESOLUCIÓN

Tema: Reducción al primer cuadrante

Análisis y procedimiento

Como $\overline{AB} // \overline{CD}$, entonces los ángulos formados por el eje de ordenadas y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son de igual medida.



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
CREEMOS EN LA EXIGENCIA

Como

$\theta+\alpha=180^\circ$

$\rightarrow \tan\theta=-\tan\alpha$

$\tan\theta=-\frac{6}{4}$

$\therefore \tan\theta=-\frac{3}{2}$

Respuesta: $-\frac{3}{2}$

PREGUNTA N.° 39

Dadas las funciones f y g definidas por

$$f_{(x)}=\arctan\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right),\ g_{(x)}=\text{arc sen}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Determine $\text{Ran}(f)\cap\text{Dom}(g)$.

A) $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

B) $\mathbb{R}$

C) $\langle-\infty;1]$

D) $[1;+\infty\rangle$

E) $[0;1]$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas inversas

Análisis y procedimiento

$$f_{(x)}=\arctan\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right);\ g_{(x)}=\text{arcsen}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

- $\frac{2|x|}{1+x^2}=\frac{2}{\frac{1+|x|^2}{|x|}}=\frac{2}{|x|+\frac{1}{|x|}}$

$|x|+\frac{1}{|x|}\geq 2\rightarrow 0<\frac{1}{|x|+\frac{1}{|x|}}\leq\frac{1}{2}\rightarrow 0<\frac{2}{|x|+\frac{1}{|x|}}\leq 1$

$0<\arctan\left(\frac{2}{|x|+\frac{1}{|x|}}\right)\leq\frac{\pi}{4};$

Para $x=0$,

$\arctan\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right)=0$

luego,

$\text{Ran}\,f=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

- $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$

$x+\frac{1}{x}\geq 2\vee x+\frac{1}{x}\leq -2$

$\rightarrow 0<x+\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}\vee-\frac{1}{2}\leq x+\frac{1}{x}<0$

$-\frac{1}{2}\leq x+\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}-\{0\}$

para $x=0$, g está definida.

$\rightarrow -\frac{1}{2}\leq x+\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}\subset[-1;1]$

luego $\text{Dom}g=\mathbb{R}$

$\therefore \text{Ran}f\cap\text{Dom}g=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

Respuesta: $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA

PREGUNTA N.° 40

Dada la ecuación general de la cónica $\mathscr{C}$: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ con A, B, C, D, F constantes arbitrarias, se tiene que:

I. Si $A=B\neq 0$, entonces siempre tenemos la ecuación de una circunferencia.
II. Si $B=0$ y $A\neq 0$, entonces siempre tenemos la ecuación de una parábola.
III. Si $A\cdot B<0$ y $D^2-4B^2F>0$, entonces siempre tenemos la ecuación de una hipérbola.

Luego son verdaderas:

A) solo I B) II y III C) solo II
D) solo III E) I y III

RESOLUCIÓN

Tema: Cónicas

Análisis y procedimiento

I. Como $A=B\neq 0$, entonces, la ecuación sería:

$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+F=0$

Completando cuadrados obtenemos

$$\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{D}{2A}\right)^2=\frac{C^2+D^2}{4A^2}-\frac{F}{A}$$

si $\dfrac{C^2+D^2}{4A^2}-\dfrac{F}{A}>0$ Circunferencia

si $\dfrac{C^2+D^2}{4A^2}-\dfrac{F}{A}\leq 0$ Caso degenerado (punto o conjunto vacío)

Por lo tanto, no siempre es una circunferencia.

II. En forma general, la ecuación puede expresarse como sigue:

$Ax^2+0xy+By^2+Cx+Dy+F=0$

Pero $B=0$

$\rightarrow Ax^2+0xy+0y^2+Cx+Dy+F=0$

Por la teoría de ecuación cuadrática general, tenemos que

$0^2-4A(0)=0$

La ecuación puede ser una parábola o dos rectas paralelas, o una recta o un conjunto vacío.

III. $AB<0$ y $D^2-4BF>0$ (Corrección)

Completando cuadrados en la ecuación obtenemos

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+B\left(Y+\frac{D}{2B}\right)^2=\frac{BC^2+AD^2-4ABF}{4AB}$$

$$\text{tienen} \neq \text{signo} = \frac{BC^2+\overbrace{A(D^2-4BF)}^{(+)}}{4AB} \quad \begin{cases} A\neq 0 \\ B\neq 0 \end{cases}$$

Como el segundo miembro es diferente de cero, entonces, la ecuación es una hipérbola.

Respuesta: solo III

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO CREEMOS EN LA EXIGENCIA