PREGUNTA N.° 1

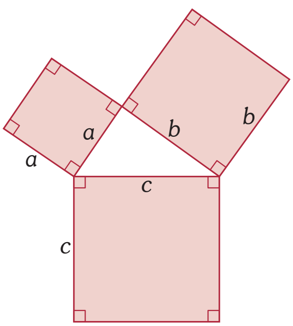
El perímetro de un triángulo es 50 m y sobre cada lado del triángulo se forma un cuadrado cuyo lado coincida con el lado del triángulo. Como resultado, la suma de las áreas de los cuadrados formados es 900 m^2 y el lado del primer cuadrado es al del segundo como, el lado del tercero es a la mitad del primero. La relación del mayor y el menor de los lodos del triángulo es de (Considere que los lados del triángulo son números naturales)

A) 2 a 1
B) 5 a 2
C) 3 a 1
D) 5 a 1
E) 11 a 2

RESOLUCIÓN

Tema: Áreas de regiones cuadrangulares

Análisis y procedimiento



Datos:

$a+b+c=50$ (I)
$a^2+b^2+c^2=900$ (II)
$a^2=2bc$ (III)

Reemplazamos (III) en (II).

$b^2+c^2+2bc=900$
$b+c=30$ (IV)

Reemplazamos (IV) en (I).

$a+30=50$
$a=20$

De (III) y (IV)

$b=10$
$c=20$

Entonces

$$\frac{\text{lado mayor}}{\text{lado menor}}=\frac{20}{10}=2$$

Por lo tanto, la relación es de 2 a 1.

Respuesta: 2 a 1

PREGUNTA N.° 2

Las magnitudes X e Y son tales que $(Y-2)$ y (X^2+1) son inversamente proporcionales. Se sabe que cuando $X=2$, se tiene que $Y=3$. Determine la ecuación que relaciona X e Y

A) $Y=\dfrac{3}{X^2-1}+2$

B) $Y=-\dfrac{5}{X^2+1}+4$

C) $Y=\dfrac{20}{X^2+1}-1$

D) $Y=\dfrac{11+X^2}{X^2+1}$

E) $Y=\dfrac{7+2X^2}{X^2+1}$

RESOLUCIÓN

Tema: Magnitudes proporcionales

Análisis y procedimiento

Sabemos que para dos magnitudes A y B

Si A IP B, entonces

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{valor}\\ \text{de } A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{valor}\\ \text{de } B\end{pmatrix}=\text{cte}}$$

En el problema, para las magnitudes x e y

$$(Y-2)\ \text{IP}\ \left(X^2+1\right)$$

Además, cuando $x=2$ se tiene que $y=3$.

Generamos la igualdad según los datos dados.

$$(Y-2)\left(X^2+1\right)=(3-2)\left(2^2+1\right)$$

$$(Y-2)\left(X^2+1\right)=5$$

$$Y-2=\frac{5}{X^2+1}$$

$$Y=\frac{5}{X^2+1}+2$$

$$Y=\frac{5+2\left(X^2+1\right)}{X^2+1}$$

$$Y=\frac{7+2X^2}{X^2+1}$$

Respuesta: $Y=\dfrac{7+2X^2}{X^2+1}$

PREGUNTA N.º 3

Cualquier tipo de café crudo pierde el 20 % de su peso al tostarlo. Se ha comprado dos tipos de café crudo cuyos precios por kilogramo son 10 y 15 soles respectivamente.

Si todo el café tostado se vendiera a 15 soles el kilogramo no se ganaría ni se perdería, pero se vendió todo el café tostado en S/3240 ganando el 20 % del costo. Halle la suma de los pesos iniciales y dé como respuesta la diferencia de la mayor cifra con la menor cifra del resultado.

A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN

Tema: Regla de mezcla

Análisis y procedimiento

Recuerde que

- P_C: precio de costo
- P_V: precio de venta
- G: ganancia

$$\boxed{P_V=P_C+G}$$

Del enunciado se tiene que al tostar el café crudo se pierde el 20 % de su peso, entonces

Tipo de café	I	II
P_C(S/)	10	15
peso inicial (kg) (café crudo)	$5a$	$5b$
peso final (kg) (café tostado)	$4a$	$4b$

Si todo el café tostado se vendiera a 15 soles el kilogramo no se ganaría ni se perdería.

$$P_{V(\text{total})}=P_{C(\text{total})}$$

$$15(4a+4b)=10(5a)+15(5b)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 3n}}{10a}=\underset{\substack{\downarrow\\ 2n}}{15b}$$

Se vendió todo el café tostado a S/3240 ganando el 20 % del costo.

$$P_{V(\text{total})}=120\,\%P_{C(\text{total})}$$

$$3240=120\%[10(5a)+15(5b)]$$

$$3240=120\,\%(300n)$$

$$3240=360n$$

$$n=9$$

Luego

suma de pesos iniciales $=5a+5b=25n=225$

Piden

$5-2=3$

Respuesta: 3

PREGUNTA N.º 4

El número de hijos por familia en una determinada ciudad es una variable aleatoria H, cuya función de probabilidad es

$$f(x)=P[H=x]=\frac{Kx}{5}$$

$x=1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 3 hijos dado que tiene al menos dos hijos?

A) 0,200 B) 0,333 C) 0,214
D) 0,267 E) 0,357

RESOLUCIÓN

Tema: Probabilidades

Análisis y procedimiento

Considerando la variable aleatoria

H= número de hijos por familia en una determinada ciudad

cuya función de probabilidad está definida por

$$f_{(x)}=P[H=x]=\frac{kx}{5}\quad 1\le x\le 5\ \left(x\in\mathbb{Z}^+\right)$$

Hallamos la distribución de probabilidad.

$H=x_i$	1	2	3	4	5
$P[H=x_i]$	$\frac{k\cdot 1}{5}$	$\frac{k\cdot 2}{5}$	$\frac{k\cdot 3}{5}$	$\frac{k\cdot 4}{5}$	$\frac{k\cdot 5}{5}$

Por la propiedad de $\sum_{i=1}^{n} f_{(x_i)}=1$, hallaremos el valor de k.

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{k\cdot x_i}{5}\right)=\frac{k}{5}+\frac{2k}{5}+\frac{3k}{5}+\frac{4k}{5}+\frac{5k}{5}=1$$

$$k=\frac{1}{3}$$

Entonces la distribución de probabilidad quedará de la siguiente manera:

$H=x_i$	1	2	3	4	5
$P[H=x_i]$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

De lo que nos piden podemos notar que es una probabilidad condicional.

$$P\left[(H=3)/(H\ge 2)\right]=\frac{P\left[(H=3)\cap(H\ge 2)\right]}{P(H\ge 2)}$$

$$P\left[(H=3)/(H\ge 2)\right]=\frac{\frac{3}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}}$$

$$P\left[(H=3)/(H\ge 2)\right]=\frac{\frac{3}{15}}{\frac{14}{15}}=\frac{3}{14}=0,21428...$$

Por lo tanto, la probabilidad será aprox. 0,214.

Respuesta: 0,214

PREGUNTA N.º 5

Se tienen 496 números naturales consecutivos. Al dividir el número anterior al mayor entre el número menor de la lista de números, se obtiene como residuo 49 y como cociente un número natural diferente a 6. Indique la cifra de las centenas del número que se obtiene al multiplicar el trigésimo segundo número y el centésimo tercer número.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Operaciones fundamentales

Análisis y procedimiento

Sean los 496 números naturales consecutivos.

$$\underbrace{\overset{t_1}{(a+1)}}_{\text{menor número}};\ \overset{t_2}{(a+2)};\ \overset{t_3}{(a+3)};\ \ldots;\ \overset{t_{495}}{(a+495)};\ \underbrace{\overset{t_{496}}{(a+496)}}_{\text{mayor número}}$$

Por condición

$$\begin{array}{r|l} (a+495) & (a+1) \\ \cline{2-2} 49 & q \end{array}$$

Dato: $q\ne 6$

Resolvemos.

$$(a+495)=(a+1)\cdot q+49;\ a+1>49$$
$$a+446=(a+1)\cdot q$$
$$\frac{a+1+445}{a+1}=q$$
$$1+\frac{445}{\underbrace{a+1}}=q$$

a+1 es divisor de 445=5×89

1 ×
5 ×
89 ×
445 ✓

$\rightarrow\ a=444$

Luego se tendría

$$(t_{32})\cdot(t_{103})=(444+32)\cdot(444+103)$$
$$=(476)\cdot(547)$$
$$=260\,372$$

↑ cifra de centenas

Respuesta: 3

PREGUNTA N.º 6

Halle un número de la forma $\overline{ab1ba}$ tal que sea $\overset{\circ}{\overline{44}}$. Dar como respuesta el residuo que se obtiene al dividir dicho número entre 5.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de divisibilidad

Análisis y procedimiento

Recuerde que

$$\text{si } N=\begin{cases}\overset{\circ}{a}\\ \overset{\circ}{b}\end{cases}$$

$$\rightarrow\ N=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(a;b)}}$$

Del enunciado

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{par}}}{\overline{ab1ba}}=\overset{\circ}{\overline{44}}=\begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{\overline{11}}\end{cases}$$

- $\underset{+-+-+\leftarrow}{\overline{a\,b\,1\,b\,a}}=\overset{\circ}{\overline{11}}$

$$2a-2b+1=\overset{\circ}{\overline{11}}$$
$$2a-2b=\overset{\circ}{\overline{11}}-1=\overset{\circ}{\overline{11}}+10$$
$$a-b=\overset{\circ}{\overline{11}}+5=\begin{cases}-6\\ 5\end{cases}$$

- $a-b=-6\ \wedge\ \overline{ba}=\overset{\circ}{4}$

$\downarrow\ \uparrow\qquad\downarrow$
2 8 82 ... no cumple

- $a-b=5\ \wedge\ \overline{ba}=\overset{\circ}{4}$

$\downarrow\ \uparrow\qquad\downarrow$
8 3 38 ... no cumple
6 1 16 ... cumple

Piden el residuo que se obtiene al dividir $\overline{ab1ba}$ entre 5.

$$\rightarrow\ \overline{ab1ba}=\overline{6b1b6}=\overset{\circ}{5}+6=\overset{\circ}{5}+1$$

$\downarrow$
$\overset{\circ}{5}+1$

Por lo tanto, el residuo es 1.

Respuesta: 1

PREGUNTA N.º 7

Calcule $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+2,2$
Dar como respuesta la primera cifra decimal.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Radicación

Análisis y procedimiento

Para hallar la primera cifra decimal, debemos hallar la suma de las raíces cúbicas.

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+2,2$$

Dándole forma convenientemente

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}+2,2$$

$$(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})+2,2$$

$$4+2,2=6,2$$

Por lo tanto, la primera cifra decimal es 2.

Respuesta: 2

PREGUNTA N.º 8

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o Falsa (F).

I. El producto de un número irracional por otro irracional es siempre irracional.
II. La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional.
III. Entre dos números racionales diferentes siempre existe otro número racional.

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FFF
E) FFV

RESOLUCIÓN

Tema: Conjunto de los racionales

Análisis y procedimiento

I. **Falso**

Veamos un contraejemplo

$$\underbrace{(\sqrt{5}-1)}_{\text{irracional}}\cdot\underbrace{(\sqrt{5}+1)}_{\text{irracional}}=\underbrace{5-1}_{\text{racional}}$$

Por lo tanto, el producto de dos números irracionales puede resultar un número racional.

II. **Falso**

Veamos un contraejemplo

$$\underbrace{(3-\sqrt{5})}_{\text{irracional}}+\underbrace{(3-\sqrt{5})}_{\text{irracional}}=\underbrace{6}_{\text{racional}}$$

Por lo tanto, la suma de dos números irracionales puede resultar un número racional.

III. **Verdadero**

Se sabe que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso; es decir, entre dos racionales cualesquiera hay infinitos racionales.

Por lo tanto, entre dos racionales diferentes siempre existe otro números racionales.

Respuesta: FFV

PREGUNTA N.º 9

Sean A, B y D subconjuntos de los números reales y definimos el operador * mediante

$A * B=(A \cap B)^*$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $(A * B) * D=A *(B * D)$
II. $(A * B) * A=A * (B * A)$
III. $A * \varnothing = \varnothing$

Donde A^C indica el complemento de A.

A) VFF
B) FVV
C) VVV
D) FFF
E) FVF

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de conjuntos

Análisis y procedimiento

Recuerde

Ley conmutativa: $A \cap B \equiv B \cap A$

Ley de De Morgan: $(A \cap B)^C \equiv A^C \cup B^C$

Ley del complemento: $(A^C)^C \equiv A$
$(\phi)^C \equiv U$

Del enunciado

A, B y D son subconjuntos de $\mathbb{R}$

$A*B=(A\cap B)^C$

Entonces

$B*A=(B\cap A)^C$

De allí tenemos que $A*B\equiv B*A$.

I. **Falsa**

$$\underbrace{(A*B)*D}=\underbrace{A*(B*D)}$$

$$(A\cap B)^C*D \qquad A*(B\cap D)^C$$

$$\left[(A\cap B)^C\cap D\right]^C \qquad \left[A\cap(B\cap D)^C\right]^C$$

$$(A\cap B)\cup D^C \qquad A^C\cup(B\cap D)$$

II. **Verdadera**

$$\underbrace{(A*B)*A}=A*(B*A)$$

$$A*\underbrace{(A*B)}$$

$$A*\ (B*A)$$

III. **Falsa**

$$\underbrace{A*\phi}=\phi$$

$$\underbrace{(A\cap\phi)}^C$$

$$\underbrace{(\phi)^C}$$

$$U$$

Respuesta: FVF

PREGUNTA N.º 10

Definimos el conjunto

$A=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-2}=1\right\}$

Considere las siguientes proposiciones:

I. La suma de los elementos del conjunto A es 7.

II. Card$(A)=2$

III. $2\sqrt{2}-2\in A$

Determine de las proposiciones dadas cuáles son verdaderas.

A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y II E) I y III

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de conjuntos

Análisis y procedimiento

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-2}=1\right\}$$

Sea

$$\sqrt[3]{x-2}=m \ \rightarrow\ x=m^3+2$$

Reemplazamos en la ecuación.

$$\sqrt{m^3+2+1}-m=1$$

$$\sqrt{m^3+3}=m+1;\ m\geq -1$$

Elevamos al cuadrado.

$$m^3+3=m^2+2m+1$$

$$m^3-m^2-2m+2=0$$

$$m^2(m-1)-2(m-1)=0$$

$$(m-1)(m^2-2)=0$$

$$(m-1)(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})=0$$

$$\rightarrow\ m=1\ \vee\ \underbrace{\cancel{m=-\sqrt{2}}}_{\text{no}}\ \vee\ m=\sqrt{2}$$

Como

$$x=m^3+2$$

$$\rightarrow\ x=3;\ x=2\sqrt{2}+2$$

Luego el conjunto por extensión sería

$$A=\left\{3;\ 2\sqrt{2}+2\right\}$$

Verificamos las proposiciones.

I. Falsa

II. Verdadera

III. Falsa

Respuesta: solo II

PREGUNTA N.° 11

Sea $f:\left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f_{(x)}=\frac{2x-1}{2x^2-x+\frac{1}{2}}$$

Entonces el rango de f es el conjunto

A) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{3}{2}\right]$ C) $\left\langle \frac{3}{2}; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{2}{3}\right]$ E) $\left\langle -\infty; \frac{2}{3}\right]$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

$$f_{(x)}=\frac{2x-1}{x(2x-1)+\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad \underbrace{x>\frac{1}{2}}_{2x-1>0}$$

Sea

$$a=2x-1>0$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{a+1}{2}=x$$

Reemplazamos

$$f_{(x)}=\frac{a}{\left(\frac{a+1}{2}\right)a+\frac{1}{2}}=\frac{2a}{a^2+a+1}$$

$$f_{(x)}=\frac{2}{a+1+\frac{1}{a}}$$

Del dato:

$$a>0 \ \to \ a+\frac{1}{a}\geq 2$$

+1

$$1+a+\frac{1}{a}\geq 3$$

inversa

$$0<\frac{1}{a+1+\frac{1}{a}}\leq\frac{1}{3}$$

por 2

$$0<\underbrace{\frac{2}{a+1+\frac{1}{a}}}_{f_{(x)}}\leq\frac{2}{3}$$

$$\therefore \ \text{Ran}f=\left\langle 0; \frac{2}{3}\right]$$

Respuesta: $\left\langle 0; \frac{2}{3}\right]$

PREGUNTA N.° 12

Halle el polinomio $p_{(x)}$ de coeficientes racionales de menor grado con raíces 1 y $1+\sqrt{2}$, y que además cumpla $p_{(0)}=1$. Dé como respuesta la suma de los coeficientes del polinomio.

A) –2 B) –1 C) 0

D) 1 E) 3

RESOLUCIÓN

Tema: Polinomios

Análisis y procedimiento

Del dato se tiene que 1 es una raíz.

Entonces

$$P(1)=0$$

Por propiedad

$$P(1)=\text{suma de coeficientes}$$

$$\to P(1)=0=\text{suma de coeficientes}$$

Respuesta: 0

PREGUNTA N.° 13

Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f_{(x)}=2^x-\frac{1}{2^x}$$

Entonces podemos decir que la función inversa f^* de f, está dada por (en caso exista)

A) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$ B) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

C) no existe f^*

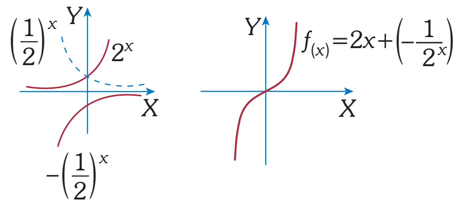
D) $\log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$ E) $\log_2\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

RESOLUCIÓN

Tema: Función inversa

Análisis y procedimiento

La gráfica de $f_{(x)}=2^x-\dfrac{1}{2^x}$ es creciente.



Entonces sí existe f^*.

Hallemos la regla de correspondencia de $f^*_{(x)}$.

Despejamos x.

$$y=2^x-\frac{1}{2^x};\ \text{ sea } a=2^x>0$$

$$y=a-\frac{1}{a}$$

$$0=a^2-ya-1$$

Usamos la fórmula general de la ecuación cuadrática.

$$a=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}\quad \text{pero } a>0$$

$$a=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

$$2^x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

$$\leftrightarrow\ \log_2 2^x=\log_2\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)$$

$$x=\log_2\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)$$

Intercambiamos x con y.

$$\underbrace{y}_{f^*_{(x)}}=\log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Respuesta: $f^*_{(x)}=\log_2\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

PREGUNTA N.° 14

Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&4&0\\6&5&9\end{bmatrix}$. Considere una matriz S de orden 3×3 triangular inferior de términos positivos, tal que

$S^2=A$, diag$(S)=(1;\ 2;\ 3)$

Calcule

$$K=\frac{\text{Traza}\left(S\,S^T\right)+16}{|A|}$$

A) 1/2 B) 1 C) 3/2
D) 2 E) 5/2

RESOLUCIÓN

Tema: Matrices y determinantes

Análisis y procedimiento

Sea $S=\begin{bmatrix}a&0&0\\b&c&0\\d&e&f\end{bmatrix}$; por dato, $S^2=A$

Así

$$S^2=\begin{bmatrix}a^2&0&0\\ab+bc&c^2&0\\ad+be+df&ce+ef&f^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&4&0\\6&5&9\end{bmatrix}$$

Como los términos de S son positivos, entonces

$$a=1;\ b=2;\ c=2;\ d=1;\ e=1;\ f=3$$

Entonces

$$SS^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&8&4\\1&4&11\end{bmatrix}$$

$$\text{traza }(SS^T)=1+8+11=20$$

también

$$|A|=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&4&0\\6&5&9\end{bmatrix}=1\times4\times9=36$$

Entonces

$$K=\frac{\text{traza}\left(SS^T\right)+16}{|A|}=\frac{20+16}{36}=1$$

$$K=1$$

Respuesta: 1

PREGUNTA N.° 15

Sean A, B, X e Y matrices de orden 2×2 tales que

$AX+BY=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$ y $2AX-BY=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}$;

si $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$, entonces la suma de los elementos de la matriz X es

A) $-0{,}4$ B) $-0{,}5$ C) $-0{,}6$
D) $-0{,}7$ E) $-0{,}8$

RESOLUCIÓN

Tema: Matriz inversa

Análisis y procedimiento

Tenemos.

$$AX+BY=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$$

$$2AX-BY=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}$$

Sumamos.

$$3AX=\begin{bmatrix}3&6\\3&3\end{bmatrix}\rightarrow AX=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

Como

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix}$$

De $AX=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$

$$X=A^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&5\\-2&-6\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&\frac{5}{2}\\-1&-3\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la suma de los elementos de la matriz X es $-0{,}5$.

Respuesta: $-0{,}5$

PREGUNTA N.° 16

Dado el problema

$$\underbrace{\text{mín}}_{(x;\,y)\in D}\ \{ax+by\}$$

con $(x_0;\,y_0)\in D$ solución única, establecer cuál de las siguientes proposiciones son correctas.

I. Siempre existe una recta L tal que $L\cap D=\{(x_0;\,y_0)\}$

II. El punto $(x_0;\,y_0)$ pertenece al interior del conjunto D.

III. $\forall\ (x;\,y)\in D,\ ax_0+by_0\geq ax+by$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

Tenemos $\underset{(x;\,y)\in D}{\text{mín}}\ \{ax+by\}$

$(x_0;\ y_0)$ solución única

$\rightarrow$ $(x_0;\ y_0)$ es un punto extremo.

Sean las rectas de nivel

$\mathscr{L}_K$: $ax+by=K$

I. **Verdadero**

Existe una recta de nivel $\mathscr{L}_K$ tal que

$$\mathscr{L}_K \cap D=\{(x_0;\ y_0)\}$$

II. **Falso**

Como $(x_0;\ y_0)$ es un punto extremo, entonces no pertenece al interior del conjunto D.

III. **Falso**

Como $(x_0;\ y_0)$ es la solución única del P.P.L.

$\text{mín}\{ax+by\}$

$\rightarrow$ $ax_0+by_0 \leq ax+by;\quad \forall\ (x;\ y) \in D$

Respuesta: solo I

PREGUNTA N.° 17

Dadas las siguientes proposiciones:

I. Si la sucesión $\left\{(-1)^n a_n\right\}$ es monótona, entonces dicha sucesión es constante.

II. Si la sucesión $\left\{|a_n|\right\}$ es convergente, entonces $\left\{a_n\right\}$ es también convergente.

III. Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es convergente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente.

Son correctas

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

RESOLUCIÓN

Tema: Sucesiones y series

Análisis y procedimiento

I. **Falso**

Si $a_n=(-2)^n$, tenemos que $\{(-1)^n a_n\}=\{2^n\}$ es monótona y no es constante.

II. **Falso**

Si $a_n=(-1)^n$, tenemos que $\{|a_n|\}=\{|(-1)^n|\}=\{1\}$ converge a 1, pero $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ diverge.

III. **Verdadero**

Como $0 \leq a_n+|a_n| \leq 2|a_n|$

$$0\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n+|a_n|\right)\leq 2\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|}_{\text{converge}}\rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n+|a_n|\right)\ \text{converge}$$

Además,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}-|a_n|\ \text{converge}$$

Luego

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n+|a_n|\right)}_{\text{converge}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}-|a_n|}_{\text{converge}}=\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n+|a_n|-|a_n|\right)}_{\text{converge}}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\ \text{converge}$$

Nota

Este teorema se conoce como convergencia absoluta.

Por lo tanto, es correcta solo III.

Respuesta: solo III

PREGUNTA N.° 18

Se tiene una sucesión geométrica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con razón r. Siendo $a_4=4$ y $a_7=12$.
Calcule r^3+a_{10}.

A) 39 B) 40 C) 42
D) 45 E) 48

RESOLUCIÓN

Tema: Sucesiones

Análisis y procedimiento

Como la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es geométrica
$\rightarrow \; a_n=ar^{n-1}, \;\; r=\text{razón}$

Por dato:

$a_4=4 \;\rightarrow\; ar^3=4 \qquad \text{(I)}$

$a_7=12 \;\rightarrow\; ar^6=12 \qquad \text{(II)}$

Dividimos (II) ÷ (I).

$$r^3=3 \;\rightarrow\; a=\frac{4}{3}$$

Luego

$$a_{10}=ar^9=a(r^3)^3$$

$$\rightarrow\; a_{10}=\left(\frac{4}{3}\right)(3)^3$$

$$\rightarrow\; a_{10}=36$$

$$\therefore\; r^3+a_{10}=39$$

Respuesta: 39

PREGUNTA N.° 19

Dado el conjunto
$S=\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < \text{Log}|x-1| < 1\}$
Determine $S \cap ([0; 2] \cup [12; 20])$.

A) ϕ B) $\langle 1; 2\rangle$ C) $[15; 20]$
D) $[12; 15]$ E) $[12; 20]$

RESOLUCIÓN

Tema: Inecuación logarítmica

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$S=\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < \log|x-1| < 1\}$$

De

$$0 < \log_{10}|x-1| < 1$$

$$10^{\circ} < |x-1| < 10^1$$

$$1 < |x-1| < 10$$

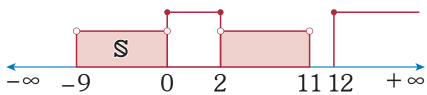
$$\rightarrow\; -10 < x-1 < -1 \vee 1 < x-1 < 10$$

$$-9 < x < 0 \vee 2 < x < 11$$

Luego

$$S=\langle -9; 0\rangle \cup \langle 2; 11\rangle$$

Piden $S \cap ([0; 2] \cup [12; 20])$.



$$\therefore\; S \cap ([0; 2] \cup [12; 20])=\phi$$

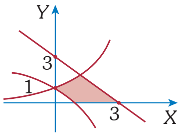
Respuesta: ϕ

PREGUNTA N.° 20

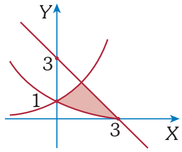
Grafique la región

$$R=\left\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \Big/\, y\le 2^x,\ y\ge\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x+y\le 3\right\}$$

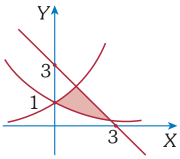
A)



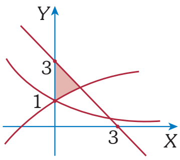
B)



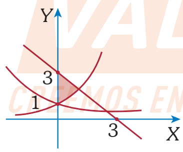
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN

Tema: Gráfica de relaciones

Análisis y procedimiento

Se tiene

$$R=\left\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \Big/\, y\le 2^x;\ y\ge\left(\frac{1}{2}\right)^x;\ x+y\le 3\right\}$$

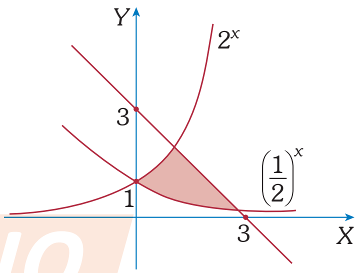
Reordenamos.

$$y\le 2^x$$

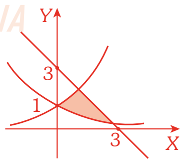
$$y\ge\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y\le 3-x$$

Graficamos.

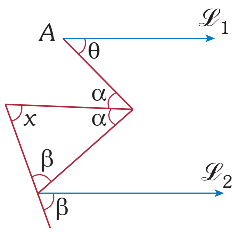


Respuesta:



PREGUNTA N.° 21

Sabiendo que $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$ y θ es la medida de un ángulo agudo. Calcule el mínimo valor entero de x.



A) 41° B) 42° C) 44°
D) 45° E) 46°

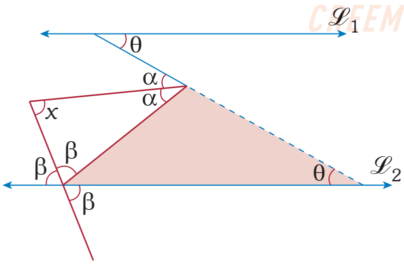
RESOLUCIÓN

Tema: Ángulo entre dos bisectrices

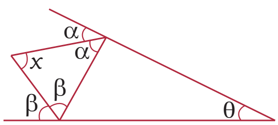
Análisis y procedimiento

Nos piden $x_{(\text{mínimo valor entero})}$.

Dato: θ es la medida de un ángulo agudo.



Del gráfico se observa



Por teorema

$$x=90-\frac{\theta}{2};\ \ \theta=180-2x$$

Pero θ es agudo, entonces

$$180°-2x<90°$$
$$45°<x$$

$$\therefore\ \underset{\substack{\text{valor}\\ \text{entero}}}{x_{\text{mínimo}}}=46°$$

Respuesta: 46°

PREGUNTA N.° 22

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle ACB)=30°$, si se traza la mediana $\overline{BM}$, calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 75° B) 80° C) 90°
D) 100° E) 105°

RESOLUCIÓN

Tema: Aplicaciones de la congruencia

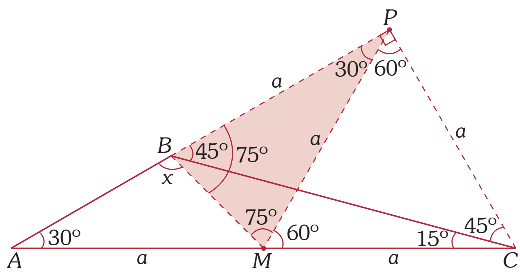
Análisis y procedimiento

Nos piden $m\sphericalangle ABM=x$.

Datos:

$m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle ACB)=30°$

BM es mediana



Se prolonga $\overline{AB}$ y se traza $\overline{CP}\perp\overleftrightarrow{AB}$.

En el ⊿APC, se traza $\overline{PM}$, entonces, $PM=a$.

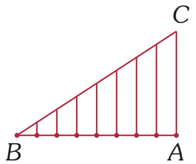
En el △BPM, isósceles, $m\sphericalangle PBM=m\sphericalangle BMP=75°$.

$\therefore\ x=105°$

Respuesta: 105°

PREGUNTA N.° 23

El cateto $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC se divide en 8 partes congruentes. Por los puntos de división se trazan 7 segmentos paralelos al cateto $\overline{AC}$ tal como se muestra en la figura. Si $AC=10$ m, halle la suma (en m) de las longitudes de los 7 segmentos.



A) 33 B) 34 C) 35
D) 36 E) 37

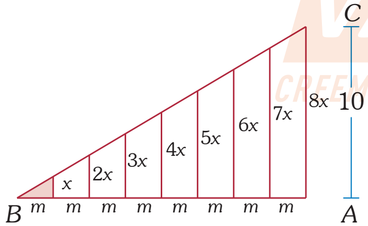
RESOLUCIÓN

Tema: Semejanza de triángulos

Análisis y procedimiento

Nos piden S_x.

S_x: suma de longitudes de los 7 segmentos.



Al trazar los segmentos paralelos a $\overline{AC}$ se determinan triángulos rectángulos semejantes.
Entonces

$$S_x=x+2x+3x+4x+5x+6x+7x$$
$$S_x=x(1+2+3+4+5+6+7)$$
$$S_x=28x$$
$$AC=8x=10 \quad \rightarrow \quad x=\frac{5}{4}$$
$$S_x=28\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$\therefore\; S_x=35$$

Respuesta: 35

PREGUNTA N.° 24

En un cuadrilátero $ABCD$, las diagonales miden $AC=17$ cm y $BD=15$ cm; sea M punto medio de $\overline{AC}$ y F punto medio de $\overline{BD}$; los ángulos interiores de B y D miden 90°. Calcule MF en cm.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

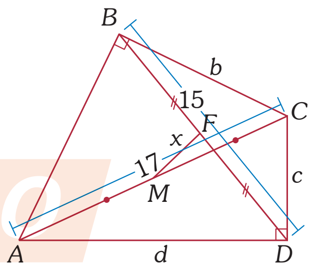
RESOLUCIÓN

Tema: Relaciones métricas en el cuadrilátero

Análisis y procedimiento

Piden $MF=x$.

Dato: $AC=17$; $BD=15$



Por teorema de Euler

$$\underbrace{a^2+b^2}_{(17)^2}+\underbrace{c^2+d^2}_{(17)^2}=(AC)^2+(BD)^2+4x^2$$
$$\cancel{(17)^2}+(17)^2=\cancel{(17)^2}+(15)^2+4x^2$$
$$4x^2=64$$

$$\therefore\; x=4$$

Respuesta: 4

PREGUNTA N.° 25

Al cortarse dos cuerdas de una misma circunferencia perpendicularmente, una de ellas queda dividida en segmentos de 3 y 4 unidades y la otra en segmentos de 6 y 2 unidades. Determine el diámetro de la circunferencia.

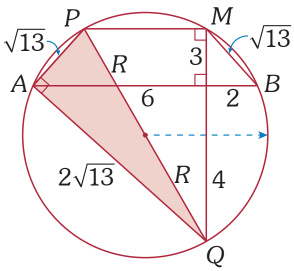
A) $\sqrt{87}$ B) $\sqrt{73}$ C) $\sqrt{68}$
D) $\sqrt{65}$ E) $\sqrt{63}$

RESOLUCIÓN

Tema: Relaciones métricas en triángulos rectángulos

Análisis y procedimiento

Piden $2R$.



Del gráfico

$AP=MB=\sqrt{13}$

En el $\triangle APQ$

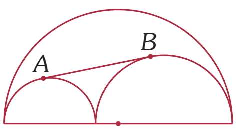
$2R=\sqrt{13}\sqrt{5}$

$\therefore\ 2R=\sqrt{65}$

Respuesta: $\sqrt{65}$

PREGUNTA N.° 26

La figura muestra tres semicircunferencias y la longitud de la circunferencia mayor es 10π u. Si $AB=\sqrt{24}$ u, siendo $\overline{AB}$ tangente a las semicircunferencias interiores, calcule la longitud (en u) de la circunferencia menor.



A) 2π B) 3π C) 4π
D) 5π E) 6π

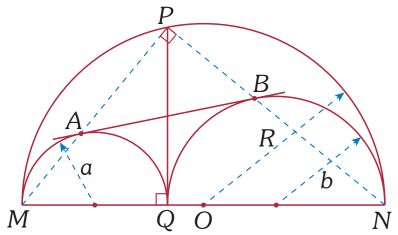
RESOLUCIÓN

Tema: Relaciones métricas en la circunferencia

Análisis y procedimiento

Piden ℓ_a.

ℓ_a: longitud de la circunferencia menor



Dato: ℓ_R: longitud de la circunferencia mayor

$\ell_R=10\pi$ y $AB=\sqrt{24}$

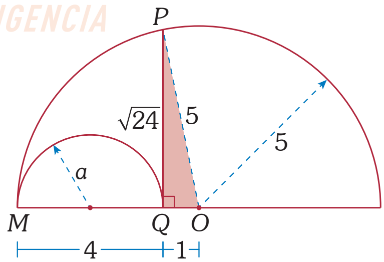
Del gráfico

M, A y P son colineales.
N, B y P son colineales.

Luego, $APBQ$ es un rectángulo.

$\rightarrow\ PQ=AB=\sqrt{24}$

$\ell_R=10\pi=2\pi R \rightarrow R=5$



En el $\triangle PQO$, $(QO)^2=5^2-\sqrt{24}^{\,2}$

$QO=1$

$\rightarrow\ QM=2a=4$

$a=2$

$\ell_a=2\pi(2)$

$\therefore\ \ell_a=4\pi$

Respuesta: 4π

PREGUNTA N.° 27

Para tres circunferencias tangentes (exteriormente) dos a dos, la suma de sus radios es 10 cm y el producto de los mismos es 40 cm^3. Halle el área (en cm^2) de la región triangular cuyos vértices son los centros de la circunferencia.

A) 18 B) 18,5 C) 19
D) 19,5 E) 20

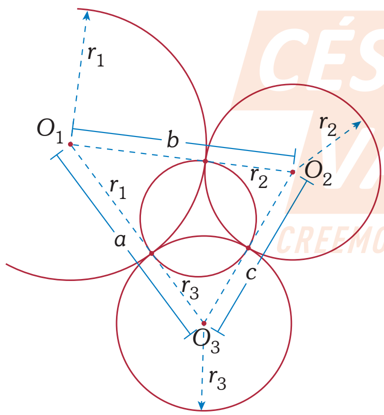
RESOLUCIÓN

Tema: Área de regiones triangulares

Análisis y procedimiento

Piden $\mathbb{A}_{\triangle O_1O_2O_3}$

Dato: $r_1+r_2+r_3=10$ y $r_1r_2r_3=40$



$$a+b+c=2r_1+2r_2+2r_3=20=2P \rightarrow P=10$$

$$r_1=P-c;\ \ r_2=P-a\ \ \text{y}\ \ r_3=P-b$$

Por teorema de Herón

$$\mathbb{A}_{\triangle O_1O_2O_3}=\sqrt{P(P-c)(P-a)(P-b)}=\sqrt{10r_1r_2r_3}$$

Como $r_1r_2r_3=40$

$$\mathbb{A}_{\triangle O_1O_2O_3}=\sqrt{10(40)}=20$$

Respuesta: 20

PREGUNTA N.° 28

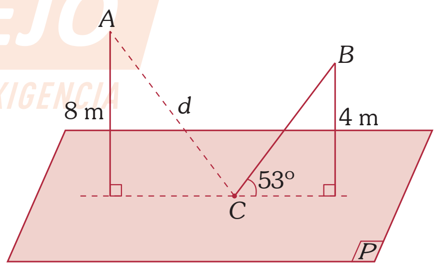
El punto A está a 8 m encima de un plano horizontal P, y el punto B se halla a 4 m encima del mismo plano. Si C es un punto del plano P tal que $AC+BC$ es mínimo y el ángulo que forman la recta $\overleftrightarrow{CB}$ con el plano P es 53°, entonces (en m) AC es

A) 8 B) 8,5 C) 9
D) 9,5 E) 10

RESOLUCIÓN

Tema: Geometría del espacio

Análisis y procedimiento



Piden AC

$C \in \square P$

de los datos $CB=5$ m y $d \geq 8$ m

Condición

$BC+d$ (mínimo)

Como $BC=5$, entonces d debe ser mínimo.

Luego $d=8$.

$\therefore\ \ AC=8$

Respuesta: 8

PREGUNTA N.° 29

Las caras de un triedro equilátero de vértice V miden 60°. En una de sus aristas se considera un punto R de tal manera que $VR=2$ cm. Por R pasa un plano perpendicular a $\overline{VR}$ que interseca a las otras aristas en S y T. Halle el área del triángulo RST (en cm^2).

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{26}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{2}$

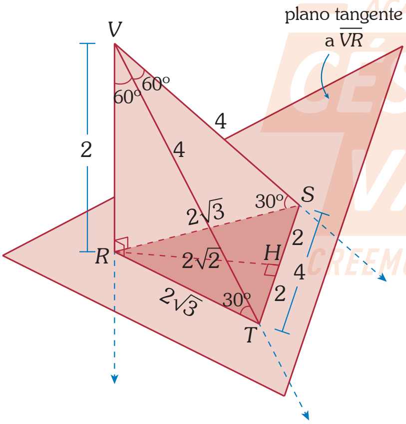
RESOLUCIÓN

Tema: Ángulo triedro

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle RST}$

Dato: El ángulo triedro es equilátero de caras iguales a 60°, $V_R=2$.



En el ◺VRT, notable de 30° y 60°, $RT=2\sqrt{3}$ y $VT=4$.

Además, $\triangle VST$ es equilátero y $ST=4$.

Luego, en el $\triangle RST$, $\overline{RH}$ es altura,

entonces, $HS=HT=2$ y $RH=2\sqrt{2}$.

Finalmente

$$\mathbb{A}_{\triangle RST}=\frac{(4)(2\sqrt{2})}{2}$$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\triangle RST}=4\sqrt{2}$

Respuesta: $4\sqrt{2}$

PREGUNTA N.° 30

Sea el tetraedro regular de arista a, con a un entero positivo diferente de múltiplo de 3. Se unen los baricentros de las caras del tetraedro regular formando un tetraedro nuevo y así se repite el proceso n veces. Si $\frac{S_n}{V_n}=\frac{243\sqrt{6}}{4}$, donde S_n y V_n son el área total y el volumen del tetraedro respectivamente en el proceso n-ésimo. Halle $81\sqrt{6}\,h_n$, siendo h_n la altura del tetraedro en el proceso n-ésimo.

A) $8\sqrt{3}$ B) 16 C) $8\sqrt{6}$
D) $16\sqrt{2}$ E) 32

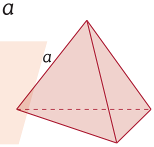
RESOLUCIÓN

Tema: Poliedros regulares

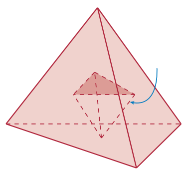
Análisis y procedimiento

Tenemos en cuenta que en todo tetraedro regular

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{superficie}\\ \text{total}}}}{\text{volumen}}=\frac{6\sqrt{6}}{a}$$



Dato: $\frac{\mathbb{S}_n}{\mathbb{V}_n}=\frac{243\sqrt{6}}{4}$



Piden

$81\sqrt{6}h_n$ (h_n: altura del tetraedro regular n-ésimo)

Como $h_n=a_n\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\rightarrow\ 81\sqrt{6}h_n=81\sqrt{6}\left(a_n\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=81\sqrt{6}\left(\frac{\mathbb{V}_n}{\mathbb{S}_n}\cdot 6\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$=81\sqrt{6}h_n\cdot\frac{4}{243\sqrt{6}}\cdot 6\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\therefore\ 81\sqrt{6}h_n=16$

Respuesta: 16

PREGUNTA N.° 31

En un tronco de pirámide ABC-$A_1B_1C_1$, los volúmenes de las pirámides B_1-ABC y A-$A_1B_1C_1$, miden V_1 y V_2 respectivamente. Determine el volumen de la pirámide A-CB_1C_1.

A) $\sqrt{V_1V_2}$ B) $\dfrac{V_1V_2}{V_1+V_2}$ C) $\dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$

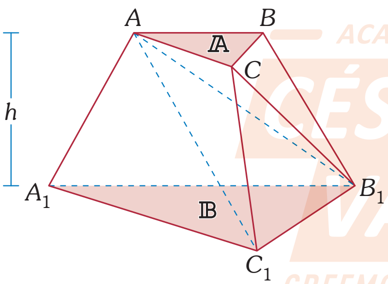
D) $2\sqrt{V_1V_2}$ E) $3\sqrt{V_1V_2}$

RESOLUCIÓN

Tema: Tronco de pirámide

Análisis y procedimiento

Nos piden $V_{A\text{-}CB_1C_1}=V_x$.



Datos:

$$V_1=\frac{\mathbb{A}h}{3}$$

$$V_2=\frac{\mathbb{B}h}{3}$$

Tenemos.

$$V_{\text{tronco}}=\frac{h}{3}\left(\mathbb{A}+\mathbb{B}+\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}\right)$$

$$\cancel{V_1}+V_x+\cancel{V_2}=\cancel{\frac{h\mathbb{A}}{3}}+\cancel{\frac{h\mathbb{B}}{3}}+\frac{h}{3}\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}$$

$$V_x=\sqrt{\frac{\mathbb{A}h}{3}}\sqrt{\frac{\mathbb{B}h}{3}}$$

$$\therefore\ V_x=\sqrt{V_1V_2}$$

Respuesta: $\sqrt{V_1V_2}$

PREGUNTA N.° 32

El volumen de un cono de revolución es 36π cm^3. Se inscribe un triángulo equilátero ABC en la base del cono. El triángulo ABC está circunscrito a una circunferencia cuyo círculo es base de un cilindro recto inscrito en el cono. Calcule el volumen del cilindro (en cm^3).

A) $\dfrac{27\pi}{10}$

B) $\dfrac{27\pi}{8}$

C) $\dfrac{27\pi}{5}$

D) $\dfrac{27\pi}{2}$

E) 27π

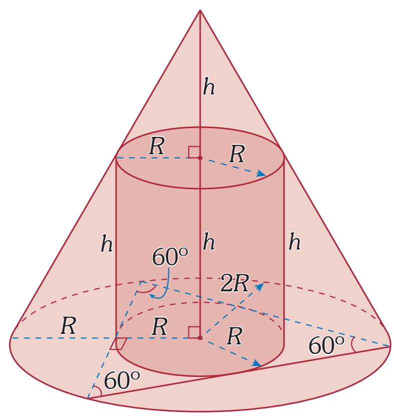
RESOLUCIÓN

Tema: Cono de revolución

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}_{\text{cilindro}}$.

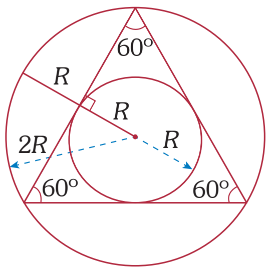
Dato: $\mathbb{V}_{\text{cono}}=36\pi$



Sabemos que

$$\mathbb{V}_{\text{cilindro}}=\pi R^2\cdot h \qquad \text{(I)}$$

En la base observamos



Del dato $\mathbb{V}_{\text{cono}}=36\pi$

$$\frac{\pi(2R)^2\cdot(2h)}{3}=36\pi$$

$$\rightarrow\ R^2\cdot h\frac{27}{2} \qquad \text{(II)}$$

Luego, reemplazamos (II) en (I).

$$\therefore\ \mathbb{V}_{\text{cilindro}}=\frac{27\pi}{2}$$

Respuesta: $\frac{27\pi}{2}$

PREGUNTA N.° 33

Sea α un ángulo en el II cuadrante con $\tan(\alpha)=-\frac{7}{24}$ y β un ángulo en el III cuadrante con $\cot(\beta)=\frac{3}{4}$. Determine el valor de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

A) $-\frac{107}{125}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{17}{125}$

D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{107}{125}$

RESOLUCIÓN

Tema: Identidades trigonométricas de ángulos compuestos

Análisis y procedimiento

Por condición 1

$$\tan\alpha=-\frac{7}{24}$$

$$\alpha\in \text{IIC} \ \rightarrow\ \operatorname{sen}\alpha=\frac{7}{25}$$

$$\cos\alpha=-\frac{24}{25}$$

Por condición 2

$$\cot\beta=\frac{3}{4}$$

$$\beta\in \text{IIIC} \ \rightarrow\ \operatorname{sen}\beta=-\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=-\frac{3}{5}$$

Se busca calcular $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

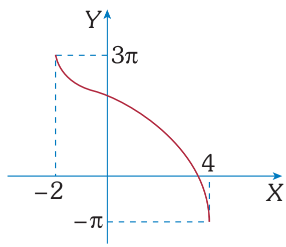
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\left(\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{24}{25}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$$

Respuesta: $\frac{3}{5}$

PREGUNTA N.° 34

Si la gráfica de $y=A\arccos(Bx+C)+D$ es



determine el valor de $E=A+B+C$.

A) 3 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$

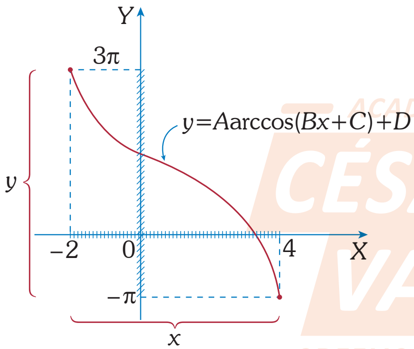
D) 4 E) $\frac{14}{3}$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas inversas

Análisis y procedimiento

Piden $E=A+B+C$.



Por definición

$-1\leq Bx+C\leq 1$ (I)

$0<\arccos(Bx+C)\leq\pi$ (II)

Del gráfico

$-2\leq x\leq 4$

Si $B>0$

$\rightarrow\ -2B\leq Bx\leq 4B$

Sumando C

$\rightarrow\ C-2B\leq Bx+C\leq 4B+C$

De (I)

$C-2B=-1\ \rightarrow\ B=1/3$

$4B+C=1\ \rightarrow\ C=-1/3$

De (II), multiplicamos A $(A>0)$

$0A\leq A\arccos(Bx+C)\leq A\pi$

Sumando D

$D\leq A\arccos(Bx+C)+D\leq A\pi+D$

Del gráfico

$-\pi\leq A\arccos(Bx+C)+D\leq 3\pi$

Entonces

$D=-\pi$ y $A\pi+D=3\pi$

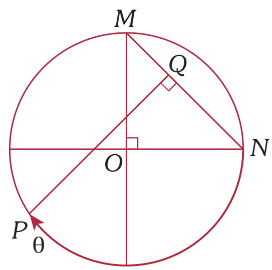
$\rightarrow\ A=4$

$\therefore\ E=4+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}}=4$

Respuesta: 4

PREGUNTA N.° 35

En el círculo trigonométrico de la figura, θ es un ángulo negativo en posición normal. Si $\overline{PQ}$ es perpendicular a $\overline{MN}$, halle las coordenadas de $Q(x_0;\,y_0)$ y dé como respuesta x_0-y_0.



A) $2\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)$

B) $\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)$

C) $2\operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta)$

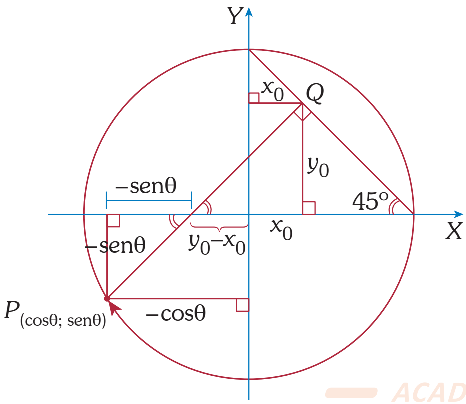
D) $\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta)$

E) $\operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta)$

RESOLUCIÓN

Tema: Circunferencia trigonométrica

Análisis y procedimiento



En la circunferencia trigonométrica, las coordenadas del punto P serán $(\cos\theta;\ \text{sen}\theta)$.

En el gráfico

$$y_0-x_0=(-\cos\theta)-(-\text{sen}\theta)$$

$$y_0-x_0=-\cos\theta+\text{sen}\theta$$

$$\therefore\ x_0-y_0=\cos\theta-\text{sen}\theta$$

Respuesta: $\cos\theta-\text{sen}\theta$

PREGUNTA N.° 36

Obtenga el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=1-\cos(x) \\ 1=4y\cos(x) \end{cases}$$

A) $\left\{\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)\Big/k\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{3};1\right)\Big/k\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\left(k\pi\pm\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)\Big/k\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\left(k\pi\pm\frac{\pi}{3};1\right)\Big/k\in\mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\left(k\pi\pm\frac{\pi}{6};\frac{1}{3}\right)\Big/k\in\mathbb{Z}\right\}$

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuaciones trigonométricas

Análisis y procedimiento

$$y=1-\cos(x) \qquad \text{(I)}$$

$$1=4y\cos(x) \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$1=4(1-\cos x)\cos x$$

$$1=4\cos x-4\cos^2 x$$

$$\rightarrow\ 4\cos^2 x-4\cos x+1=0$$

$$\rightarrow\ (2\cos x-1)^2=0$$

$$\rightarrow\ \cos x=\frac{1}{2} \qquad \text{(III)}$$

$$x=\left\{2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$$

Reemplazamos (III) en (I).

$$y=1-\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \left\{2k\pi\pm\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$$

Respuesta: $\left\{2k\pi\pm\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

PREGUNTA N.° 37

Determine el menor periodo positivo de la función definida por $f_{(x)}=\sqrt{1+\cos(2x)}+\sqrt{1-\cos(2x)}$.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3\pi}{2}$

D) 2π E) 4π

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas directas

Análisis y procedimiento

$$f_{(x)}=\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}$$

$$f_{(x)}=\sqrt{2\cos^2 x}+\sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\, x}$$

$$f_{(x)}=\sqrt{2}\,|\cos x|+\sqrt{2}\,|\mathrm{sen}\, x|$$

Cálculo del periodo (T) a partir de la igualdad

$$f_{(x+T)}=f_{(x)}$$

$$\sqrt{2}|\cos(x+T)|+\sqrt{2}|\mathrm{sen}(x+T)|=\sqrt{2}|\cos x|+\sqrt{2}|\mathrm{sen}\, x|$$

$$|\cos(x+T)|+|\mathrm{sen}(x+T)|=|\cos x|+|\mathrm{sen}\, x| \qquad (*)$$

Observación

El menor valor positivo para (T) que verifica la condición (*) es $\frac{\pi}{2}$, puesto que

$$\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\mathrm{sen}\, x|$$

$$\left|\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|$$

Por lo tanto, el periodo es $\frac{\pi}{2}$.

Respuesta: $\frac{\pi}{2}$

PREGUNTA N.° 38

Un marino que observa el horizonte desde un faro de altura h, lo hace con un ángulo de depresión θ. Calcule el radio R de la Tierra en función de h y θ.

A) $\dfrac{h\,\mathrm{sen}(\theta)}{1-\mathrm{sen}(\theta)}$ B) $\dfrac{h\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}$ C) $\dfrac{1+\cos(\theta)}{h\cos(\theta)}$

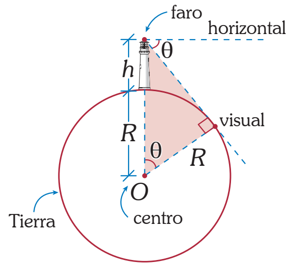
D) $\dfrac{1+\mathrm{sen}(\theta)}{h\,\mathrm{sen}(\theta)}$ E) $\dfrac{h\cos(\theta)}{1-\mathrm{sen}(\theta)}$

RESOLUCIÓN

Tema: Ángulos verticales

Análisis y procedimiento

θ: ángulo de depresión para un punto del horizonte



Por definición

$$\cos\theta=\frac{R}{R+h}$$

$\rightarrow\ R\cos\theta+h\cos\theta=R$

$\rightarrow\ h\cos\theta=R(1-\cos\theta)$

$\therefore\ R=\dfrac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$

Respuesta: $\dfrac{h\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}$

PREGUNTA N.° 39

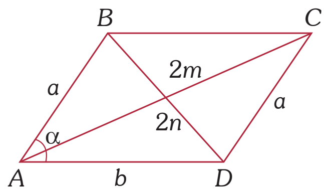
El menor ángulo de un paralelogramo mide α y sus diagonales miden $2m$ y $2n$. Calcule su área. ($m>n$)

A) $(m^2-n^2)\tan(\alpha)$ B) $(m^2-n^2)\cot(\alpha)$
C) $(m^2-n^2)\sec(\alpha)$
D) $(m^2-n^2)\csc(\alpha)$ E) $(m^2-n^2)\mathrm{sen}(\alpha)$

RESOLUCIÓN

Tema: Resolución de triángulos rectángulos

Análisis y procedimiento



$\mathbb{S}$: área del paralelogramo

$\mathbb{S}=ab\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad$ (I)

Por teorema de cosenos ($\triangle ADC$)

$$(2m)^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha)$$

$$4m^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha \qquad \text{(II)}$$

Por teorema de cosenos ($\triangle ABD$)

$$(2n)^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

$$4n^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha \qquad \text{(III)}$$

Restamos (II) y (III).

$$4m^2-4n^2=4ab\cos\alpha$$

$$\frac{m^2-n^2}{\cos\alpha}=ab$$

Reemplazamos en (I).

$$\mathbb{S}=\left(\frac{m^2-n^2}{\cos\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha$$

$$(m^2-n^2)\tan\alpha$$

$$\therefore\ \mathbb{S}=(m^2-n^2)\tan\alpha$$

Respuesta: $(m^2-n^2)\tan\alpha$

PREGUNTA N.° 40

La ecuación de una cónica en coordenadas polares es $r=\dfrac{15}{4-4\cos(\theta)}$

Determine una ecuación cuadrática para sus puntos en coordenadas rectangulares.

A) $x^2=\dfrac{15}{2}y+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2$

B) $y^2=\dfrac{15}{2}x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2$

C) $x^2=-\dfrac{15}{2}y+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2$

D) $y^2=-\dfrac{15}{2}x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2$

E) $x^2=-\dfrac{15}{4}y+\left(\dfrac{15}{2}\right)^2$

RESOLUCIÓN

Tema: Coordenada polar

Análisis y procedimiento

$$r=\frac{15}{4-4\cos\theta}$$

Ordenando

$$\rightarrow\ 4r(1-\cos\theta)=15 \qquad (*)$$

Relación entre las coordenadas polares y cartesianas

$$\cos\theta=\frac{x}{r};\ \operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r};\ r=\sqrt{x^2+y^2}$$

Reemplazamos cosθ en (*).

$$4r\left(1-\frac{x}{r}\right)=15$$

$$\rightarrow\ 4r-4x=15$$

$$\rightarrow\ 4r=4x+15$$

$$\rightarrow\ 4\sqrt{x^2+y^2}=4x+15$$

Elevamos al cuadrado.

$$16\left(x^2+y^2\right)=16x^2+120x+225$$

$$\rightarrow\ 16y^2=120x+225$$

$$\rightarrow\ y^2=\frac{120x}{16}+\frac{225}{16}$$

$$\therefore\ y^2=\frac{15}{2}x+\left(\frac{15}{4}\right)^2$$

Respuesta: $y^2=\dfrac{15}{2}x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2$