PREGUNTA N.° 1

Determine la última cifra periódica que se obtiene al hallar la expresión decimal equivalente a la fracción

$$f=\frac{2019}{7^{2019}}$$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN

Tema: Conjunto de los números racionales

Dato:

$$f=\frac{2019}{7^{2019}}$$

Como la fracción es irreductible y el denominador es PESI con la base 10, entonces la fracción genera un decimal periódico puro.

$$\frac{2019}{7^{2019}}=0,\overset{\frown}{abc\ldots\alpha}=\frac{\overline{abc\ldots\alpha}}{999\ldots9}$$

$$\underbrace{2019(999\ldots9)}_{\ldots1}=\underbrace{7^{2019}}_{\ldots3}(\overline{abc\ldots\underset{\substack{\uparrow\\7}}{\alpha}})$$

$$7^{2019}=7^{8+3}=\underbrace{7^{\overset{o}{4}}}_{(\ldots1)}\times\underset{\substack{\downarrow\\343}}{7^3}=\ldots3$$

Por lo tanto, la última cifra del período es 7.

Respuesta: 7

PREGUNTA N.° 2

Se tiene 12 fichas numeradas del 1 al 12. Se extrae aleatoriamente una primera ficha, luego una segunda y una tercera ficha, sin reposición. Calcule la probabilidad de que estos tres números estén en progresión aritmética de razón 1 o de razón –1.

A) $\frac{1}{66}$ B) $\frac{5}{66}$ C) $\frac{7}{66}$
D) $\frac{11}{66}$ E) $\frac{35}{66}$

RESOLUCIÓN

Tema: Probabilidades

Se tiene 12 fichas numeradas del 1 al 12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Sea el experimento aleatorio (ε)

ε: extraer tres fichas una a una sin reposición

Sea el evento *A*

A: los números de las 3 fichas extraídas están en progresión aritmética de razón 1 o de razón –1.

Piden *P*[*A*].

Recuerde

- Si la razón es (+), entonces la progresión aritmética es creciente.
- Si la razón es (–), entonces la progresión aritmética es decreciente.

Tenemos los siguientes casos:

- Cuando la razón es 1

1 2 3 o 2 3 4 o 3 4 5 o ... o 10 11 12

- Cuando la razón es –1

12 11 10 o 11 10 9 o 10 9 8 o ... o 3 2 1

Para cada uno de estos 20 casos la probabilidad es

$$\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}$$

Luego,

$$P[A]=\underbrace{\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}}_{\text{20 sumandos}}$$

$$P[A]=20\left(\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}\right)$$

$$\rightarrow\ P[A]=\frac{1}{66}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que estos tres números estén en progresión aritmética de razón 1 o de razón –1 es $\frac{1}{66}$.

Respuesta: $\frac{1}{66}$

PREGUNTA N.° 3

Se está construyendo un tramo de una carretera, para lo cual se necesitan 1800 m^3 de arena gruesa, 14 400 m^3 de tierra dura, 10 800 m^3 de piedra chancada, 9000 m^3 de roca blanda y 3600 m^3 de roca dura. Si los precios del metro cúbico de cada uno de estos terrenos está dado por 15,40; 25,30; 35,20; 44 y 126,5 soles, respectivamente, determine el precio medio (en soles) del metro cúbico de terreno.

A) 37 B) 39 C) 40
D) 41 E) 42

RESOLUCIÓN

Tema: Mezcla

Sean

C_1; C_2; C_3; C_4; C_5: cantidades

P_1; P_2; P_3; P_4; P_5: precios de costo unitarios

El precio medio (P_m) es

$$P_m=\frac{C_1\times P_1+C_2\times P_2+C_3\times P_3+C_4\times P_4+C_5\times P_5}{C_1+C_2+C_3+C_4+C_5}$$

Recordemos que es posible trabajar solo con la relación en la que se encuentran las cantidades.

En el problema

Material	Cantidad (m^3)	Precio por m^3 en soles
arena gruesa	~~1800~~ 1	15,40
tierra dura	~~14 400~~ 8	25,30
piedra chancada	~~10 800~~ 6	35,20
roca blanda	~~9000~~ 5	44
roca dura	~~3600~~ 2	126,5

Entonces

$$P_m=\frac{1(15,4)+8(25,3)+6(35,2)+5(44)+2(126,5)}{1+8+6+5+2}$$

$$P_m=41$$

Por lo tanto, el precio medio del metro cúbico del terreno es 41 soles.

Respuesta: 41

PREGUNTA N.° 4

Halle el número de elementos del conjunto

$H=\{m\in\mathbb{N}/\ \text{MCD}(m,900)=1,\ m<900\}$

$\mathbb{N}$ conjunto de los números naturales.

A) 120 B) 150 C) 180
D) 210 E) 240

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de conjuntos

Para hallar el número de elementos del conjunto H debemos determinar al conjunto por extensión.

$$H=\{m\in\mathbb{N}/\text{MCD}(m;900)=1;\ m<900\}$$

Como los elementos del conjunto H dependerán de los valores de $m\in\mathbb{N}$, debemos hacer cumplir que

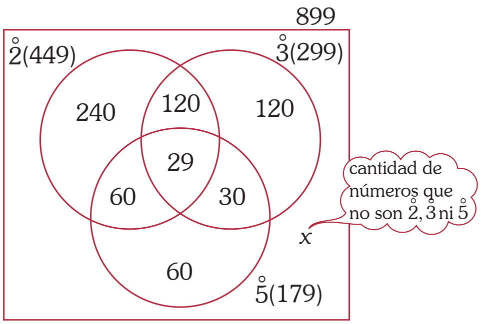
$$\text{MCD}(\underbrace{m;\ 900}_{\text{PESI}})=1 \qquad m<900$$

Para que el MCD de m y 900 sea 1, estos números deben ser primos entre sí (PESI), por lo que el problema consiste en averiguar cuántos números naturales menores que 900 son PESI con 900.

Debemos tener en cuenta que si m es PESI con $900=2^2\times3^2\times5^2$, m no puede ser múltiplo de 2 de 3 ni de 5, de donde deducimos lo siguiente:

$$\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots;\ 898;\ 899}_{\substack{\text{De todos estos números debemos}\\ \text{hallar cuántos son aquellos que}\\ \text{no son } \overset{\circ}{2};\ \overset{\circ}{3}\text{ ni } \overset{\circ}{5}.}}$$

Usamos un diagrama de Venn para hallar cuántos son los números que no son $\overset{\circ}{2}$; $\overset{\circ}{3}$ ni $\overset{\circ}{5}$.



Del gráfico

$x=240$

Por lo tanto, la cantidad de elementos del conjunto H es 240.

Nota

Otra manera de hallar cuántos números que son menores que 900 y PESI con 900 es aplicando la función de Euler.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\theta}\ \text{(descomposición canónica)}\\ \phi(N)=a^{\alpha-1}\cdot(a-1)\cdot b^{\beta-1}\cdot(b-1)\cdot c^{\theta-1}\cdot(c-1)\end{array}}$$

Entonces

$$900=2^2\times3^2\times5^2$$
$$\phi(900)=2^1\times(2-1)\times3^1\times(3-1)\times5^1\times(5-1)$$
$$\phi(900)=240$$

Por lo tanto, habrán 240 números.

Respuesta: 240

PREGUNTA N.° 5

¿Cuántos números de tres cifras son divisibles entre cuatro y la suma de sus cifras al ser dividido entre 9 da 4 de residuo?

A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 29

RESOLUCIÓN

Tema: Teoria de divisibilidad

Sea $\overline{abc}$ uno de los números que debemos hallar. Por dato se cumple que

$$\overline{abc}=\overset{\circ}{4}$$
$$a+b+c=\overset{\circ}{9}+4$$

Como la suma de cifras del número $\overline{abc}$ es $\overset{\circ}{9}+4$, podemos afirmar que $\overline{abc}=\overset{\circ}{9}+4$, de donde tendríamos.

$$\overline{abc}\begin{cases}\overset{\circ}{4}+4\\ \overset{\circ}{9}+4\end{cases}$$

Se suma $\overset{\circ}{4}$ para que los residuos sean iguales

$$\overline{abc}=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;9)}}+4$$
$$\overline{abc}=\overset{\circ}{36}+4$$
$$\overline{abc}=36K+4$$

Para poder hallar cuántos números cumplen con las condiciones, bastará hallar la cantidad de valores de K.

$$100\leq\overline{abc}\leq 999$$
$$100\leq 36K+4\leq 999$$
$$96\leq 36K\leq 995$$
$$2{,}66...\leq K\leq 27{,}638$$

$$K:\underbrace{3;\,4;\,5;\,...;\,26;\,27}_{25\text{ valores}}$$

Por lo tanto, existen 25 números que cumplen con las condiciones requeridas.

Respuesta: 25

PREGUNTA N.° 6

La relación entre el descuento racional y el descuento comercial es $\frac{9}{10}$. Determine la relación entre el valor actual comercial y el valor nominal del mismo documento.

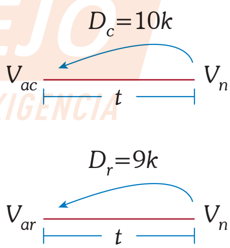
A) $\frac{6}{9}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{8}{9}$

D) $\frac{9}{9}$ E) $\frac{10}{9}$

RESOLUCIÓN

Tema: Regla de descuento

De los datos podemos deducir que se tiene una letra de cambio al cual, faltando un cierto tiempo para su vencimiento, le aplicaron el descuento comercial y racional, por lo que un esquema de ello será

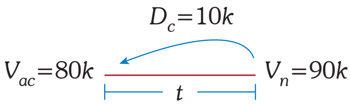


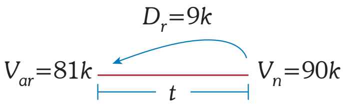
V_n=Valor nominal
D_c=Descuento comercial
D_r=Descuento racional
V_{ac}=Valor actual comercial
V_{ar}=Valor actual racional

Por la propiedad $\boxed{V_n=\dfrac{D_c\times D_r}{D_c-D_r}}$

$$V_n=\frac{10k\times 9k}{10k-9k}=90k$$

Por lo que nuestro esquema quedaría





Finalmente, hallamos la relación que se nos pide.

$$\frac{V_{ac}}{V_n}=\frac{80k}{90k}=\frac{8}{9}$$

Respuesta: $\frac{8}{9}$

PREGUNTA N.° 7

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Dado $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > b$, entonces $\forall c \in \mathbb{N}$, $ac < bc$
II. Dado $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, entonces $\forall c \in \mathbb{Z}$, $a - c \leq b - c$
III. $\forall x \in \mathbb{N}$, $x^2 \geq 0$

A) FVV B) FFF C) FFV
D) FVF E) VVV

RESOLUCIÓN

Tema: Desigualdades

I. **Falsa**
Se tiene $a, b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{N}$; $c > 0$
$a > b \;\; \rightarrow \;\; ac > bc$

II. **Verdadera**
Se tiene $a, b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z}$
$a \leq b \;\; \rightarrow \;\; a-c \leq b-c$

III. **Verdadera**
Se tiene $x \in \mathbb{N}$
$x^2 \geq 1 \;\; \rightarrow \;\; x^2 \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{N}$

Por lo tanto, la alternativa correcta es FVV.

Respuesta: FVV

PREGUNTA N.° 8

En la fabricación de helados, los insumos relevantes son la leche, el azúcar y los saborizantes. El precio de estos helados está en relación directamente proporcional con los precios de la leche y del azúcar, e inversamente proporcional a la demanda de los saborizantes. ¿Qué variación experimentará el precio de un helado de vainilla cuando el precio de la leche disminuya en $\frac{1}{3}$, el precio del azúcar aumente en $\frac{2}{5}$ y la demanda de la esencia de vainilla aumente en $\frac{2}{3}$?

A) Aumenta en 44 %.
B) Disminuye en 44 %.
C) No cambia.
D) Disminuye en 12 %.
E) Aumenta en 12 %.

RESOLUCIÓN

Tema: Magnitudes proporcionales

Del enunciado

Precio del helado (P) $\xrightarrow{\text{DP}}$ Precio de la leche (L)

Precio del helado (P) $\xrightarrow{\text{DP}}$ Precio del azúcar (A)

Precio del helado (P) $\xrightarrow{\text{IP}}$ Demanda de saborizantes (D)

Se deduce que

$$\frac{P\times D}{L\times A}=\text{cte.} \qquad (*)$$

De los datos tenemos que

	Al inicio		Al Final
L	$3a$	disminuye en 1/3	$2a$
A	$5b$	aumenta en 2/5	$7b$
D	$3c$	aumenta en 2/3	$5c$
P	P	¿?	x

Reemplazamos en (*)

$$\frac{P\times 3c}{3a\times 5b}=\frac{x\times 5c}{2a\times 7b}$$

$$x=\frac{14}{25}P \quad \rightarrow \quad x=56\%P$$

Por lo tanto, el precio disminuye en 44 %.

Respuesta: Disminuye en 44 %

PREGUNTA N.° 9

Se define la matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$ como

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i+j & \text{si} \quad i<j \\ ij & \text{si} \quad i\geq j \end{cases}$$

Calcule $\left|AA^T\right|$.

A) 82
B) 84
C) 86
D) 89
E) 92

RESOLUCIÓN

Tema: Matrices

Se tiene

$$\text{A}=[aij]_{2\times 3};\ aij=\begin{cases} 2i+j & \text{si} \quad i<j \\ ij & \text{si} \quad i\geq j \end{cases}$$

Luego

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Ahora

$$AA^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix} 42 & 53 \\ 53 & 69 \end{bmatrix}$$

$$\left|AA^T\right|=42(69)-(53)(53)$$

$$\therefore\ \left|AA^T\right|=89$$

Respuesta: 89

PREGUNTA N.° 10

Sea la expresión matemática

$$f_{(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};\quad x\notin\{-1;0;1\}$$

Calcule m ($m\in\mathbb{R}^+$), si se cumple que $f_{(\Delta)}=2$, cuando

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}}$$

A) 1
B) 49
C) 2
D) 4
E) $\sqrt{11}$

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuación irracional

Nos piden m ($m\in\mathbb{R}^+$).

Se tiene $f_{(x)}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x};\quad x\notin\{-1;0;1\}$

Como $f_{(\triangle)}=2$

$$\frac{\triangle}{\sqrt{1-\triangle^2}}+\frac{\sqrt{1-\triangle^2}}{\triangle}=2\rightarrow\triangle>0$$

Luego

$$\triangle=\sqrt{1-\triangle^2}$$

$$\triangle^2=1-\triangle^2$$

$$\triangle^2=\frac{1}{2}$$

Ahora

$$\triangle=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}}$$

$$\underbrace{\triangle^2}_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}=0$$

$\rightarrow\ m=2\vee m=-2$

Como $m>0$

$\therefore\ m=2$

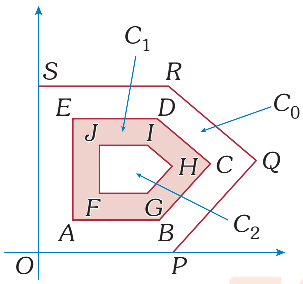
Respuesta: 2

PREGUNTA N.° 11

En el problema

Minimizar $f_{(x;\,y)}=ax+by$. Sujeto a: $(x;\,y)\in C_0$. Donde C_0 es la región admisible.

Se tiene que el punto $R\in C_0$ es la solución óptima. Si se consideran los conjuntos C_1 y C_2 de lados paralelos a C_0, tal que $C_2\subset C_1\subset C_0$ (ver figura), indique la proposición correcta.



A) $f(R)>f(D)>f(I)$

B) $f(R)<f(D)<f(I)$

C) $f(R)=f(D)=f(I)$

D) $f(R)=f(D)<f(I)$

E) $f(R)=2f(D)=4f(I)$

RESOLUCIÓN

Tema: Programación lineal

Se tiene el problema de programación lineal.

minimizar $f_{(x;\,y)}=ax+by$

región admisible $=C_0$

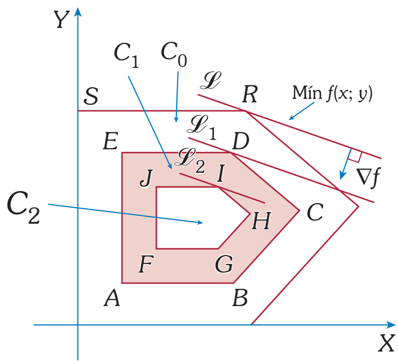
solución óptima $=R$

$C_2\subset C_1\subset C_0$

Ahora, existen

$\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, : rectas de nivel

∇f: vector de crecimiento, tal como se muestra en el gráfico.



Como ∇f indica la dirección de crecimiento de la función $f_{(x;\,y)}$.

$\rightarrow\ f(I)>f(D)>f(R)$

$\therefore\ f(R)<f(D)<f(I)$

Respuesta: $f(R)<f(D)<f(I)$

PREGUNTA N.° 12

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. La ecuación $\log_2(3x+1)=4$ tiene solución en $\left\langle -\frac{1}{3};\,\infty\right\rangle$.

II. Sean $f_{(x)}=x^2$, $g_{(x)}=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en $(0;\,\infty)$, entonces las gráficas de f y g se interceptan en un único punto.

III. Las funciones $f_{(x)}=\log_2(x+1)$ y $g_{(x)}=\log_3(x+2)$ tienen un único punto en común.

A) VVV B) VVF C) VFV

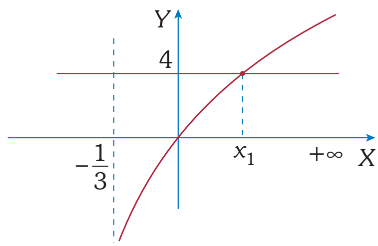
D) FVF E) FFF

RESOLUCIÓN

Tema: Función logarítmica

I. **Verdadera**

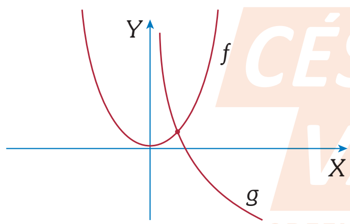
Grafiquemos $\log_2(3x+1)$.



II. **Verdadera**

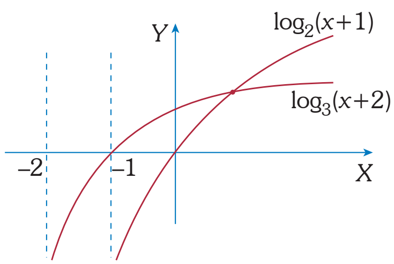
Graficamos.

$f(x)=x^2 \wedge g(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x \wedge x\neq 0$



III. **Verdadera**

Graficamos.



Respuesta: VVV

PREGUNTA N.° 13

El teorema fundamental de la aritmética establece que todo número natural mayor o igual a dos se puede expresar de forma única

$P_1^{n_1}P_2^{n_2}...P_k^{n_k}$

donde $P_1, P_2, ..., P_k$ son sus factores primos y $n_1, n_2, ..., n_k$ son enteros mayores o iguales a uno.

Se define la función

$f\colon \mathbb{N}=\{1; 2; 3; ...\} \to \mathbb{N}$

$$f_{(x)}=\begin{cases} 1 & ; \quad x=1 \\ n_1+...+n_k & ; \quad x=P_1^{n_1}...P_k^{n_k} \end{cases}$$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. f es sobreyectiva.

II. La ecuación $f_{(n)}=1$ tiene infinitas soluciones.

III. f es creciente.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones

I. **Verdadera**

f sí es sobreyectiva.

Si $n\in\mathbb{N} \;\to\; 2^n\in\mathbb{N} \;\wedge\; f(2^n)=n$

$\to$ sí existe $x=2^n$ / $f(x)=n$

II. **Verdadera**

La ecuación $f(n)=1$ tiene como solución, por ejemplo, a cualquier número primo.

$f(2)=1;\; f(3)=1;\; f(5)=1;\; ...$

III. **Falsa**

Un contraejemplo

$6<7$ y como $6=3'2' \;\to\; f(6)=2$

entonces $f(6)>f(7)$

no es creciente

Respuesta: I y II

PREGUNTA N.° 14

La ecuación $\dfrac{x^2+3x}{5x+12}=\dfrac{m-1}{m+1}$ en x, tiene raíces de signos opuestos y el mismo valor absoluto.

Dadas las siguientes proposiciones:

I. $m<3$
II. $m\in[2;6]$
III. $m\in[5;10]$

indique cuál o cuáles son las correctas.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuación cuadrática

Del enunciado sus raíces son simétricas, es decir

$$x_1=\alpha \ \wedge\ x_2=-\alpha \quad\leftrightarrow\quad x_1+x_2=0$$

$$\frac{x^2+3x}{5x+12}=\frac{m-1}{m+1} \quad -1$$

$$\frac{x^2-2x-12}{5x+2}=\frac{-2}{m+1}$$

$$(m+1)\left(x^2-2x-12\right)=-10x-4$$

$$(m+1)x^2+\left(10-2(m+1)\right)x-12(m+1)+4=0$$

Por dato:

$x_1+x_2=0$
$10-2(m+1)=0$
$\rightarrow\ m=4$

Analizamos cada proposición.

I. Es incorrecto porque 4 no es menor a 3.
II. Es correcto porque $4\in[2;6]$.
III. Es incorrecto porque $4\notin[5;10]$

Por lo tanto solo II es correcto.

Respuesta: solo II

PREGUNTA N.° 15

Dado el sistema

$-x+y\leq 2$
$-x+7y\geq 20$
$x\geq 0$
$y\geq 0$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son correctas:

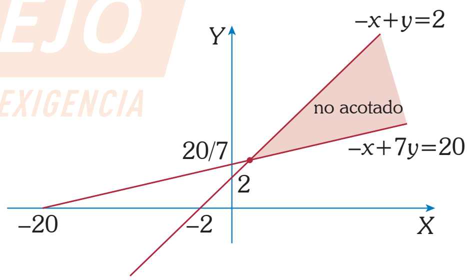
I. La solución es única.
II. La solución es un conjunto no acotado.
III. La solución es un conjunto vacío.

A) I, II y III
B) I y II
C) solo II
D) I y III
E) solo III

RESOLUCIÓN

Tema: Sistemas de inecuaciones lineales

Graficamos las relaciones.



El sistema anterior presenta infinitas soluciones.

Del gráfico se concluye lo siguiente:

I. Esta proposición es incorrecta porque tiene infinitas soluciones.
II. Esta proposición es correcta porque no es acotado.
III. Esta proposición es incorrecta porque es diferente del vacío.

Por lo tanto, solo II es la proposición correcta.

Respuesta: solo II

PREGUNTA N.° 16

Sea A una matriz cuadrada de orden 2. Sea X una matriz 2×1 no nula. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $X^TA^TAX\geq 0$

II. Existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $A^TAX=\lambda X$ y $\lambda<0$.

III. Si existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $A^TAX=\lambda X$, entonces una de las columnas de $\lambda I\text{-}A^TA$, es un múltiplo de la otra.

A) FFV B) FVV C) VFF
D) VFV E) VVV

RESOLUCIÓN

Tema: Matrices

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ ;\ X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},$$

Tenemos

I. **Verdadera**

$X^TA^TAX\geq 0$

$$(x\quad y)\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=(ax+by)^2+(cx+dy)^2\geq 0$$

II. **Falsa**

Como $A^TAX=\lambda X\ \rightarrow\ (A^TA-\lambda I)X=0$

$\rightarrow\ |A^TA-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} a^2+c^2-\lambda & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)\lambda+\underbrace{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2}_{(ad-bc)^2}=0$$

$$\lambda^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)\lambda+(ad-bc)^2=0$$

Si $\lambda<0$, los términos de la ecuación serían positivos y no tendrían soluciones en $\mathbb{R}$.

III. **Verdadera**

Lema: si $\begin{vmatrix} m & p\\ n & q\end{vmatrix}=0\ \rightarrow\ \dfrac{p}{m}=\dfrac{q}{n}$

la matriz $\begin{pmatrix} m & p\\ n & q\end{pmatrix}$ tiene columnas una múltiplo de la otra.

Como

$$A^TAx=\lambda x\ \rightarrow\ (A^TA-\lambda I)x=0$$

$$|A^TA-\lambda I|=0\ ;\ A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

Por lema, entonces $A^TA-\lambda I$ tiene una columna múltiplo de la otra.

Respuesta: VFV

PREGUNTA N.° 17

Sean p, q, r, t proposiciones lógicas tales que

$p\rightarrow r=\text{V},\ p\rightarrow\sim q=\text{F}$

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones e indique cuántas son verdaderas.

I. $\sim p\rightarrow t=\sim(t\wedge\sim t)$

II. $(p\wedge q)\wedge t=(q\wedge r)\wedge t$

III. $(p\vee t)\wedge q=(p\wedge t)\vee q$

IV. $\sim(\sim p\vee t)\wedge(p\rightarrow\sim t)=\sim t$

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Logica proposicional

De los datos tenemos que

$$\underbrace{p}_{V}\to\underbrace{\sim q}_{F}\equiv F\quad\begin{cases}p\equiv V\\ q\equiv V\end{cases}$$

$$\underbrace{p}_{V}\to\underbrace{r}_{V}\equiv V\quad\{r\equiv V$$

Evaluamos las proposiciones.

I. **Verdadero**

$$\underbrace{\sim p}\to\underbrace{t}=\underbrace{\sim(t\wedge\sim t)}$$
$$\underbrace{F\to t}=\underbrace{\sim F}$$
$$V\;=\;V$$

II. **Verdadero**

$$(\underbrace{p\wedge q})\wedge t=(\underbrace{q\wedge r})\wedge t$$
$$\underbrace{V\quad\wedge t}=\underbrace{V\quad\wedge t}$$
$$t\;=\;t$$

III. **Verdadero**

$$(p\vee t)\wedge q=(p\wedge t)\vee q$$
$$(\underbrace{V\wedge t})\wedge V=(\underbrace{V\wedge t})\vee V$$
$$\underbrace{V\quad\wedge V}=\underbrace{t\quad\vee V}$$
$$V\qquad V$$

IV. **Verdadero**

$$\sim(\underbrace{\sim p}\vee t)\wedge(p\to\sim t)=\sim t$$
$$\sim(F\vee t)\wedge(V\to\sim t)=\sim t$$
$$\sim t\quad\wedge(F\vee\sim t)=\sim t$$
$$\underbrace{\sim t\wedge\sim t}=\sim t$$
$$\sim t\;=\sim t$$

Por lo tanto, hay 4 proposiciones verdaderas.

Respuesta: 4

PREGUNTA N.° 18

Dadas las siguientes proposiciones con respecto a la suma finita:

$$\sum_{k=0}^{1720}\left(-\frac{1}{x}\right)^k$$

I. La suma es igual a cero para $x=1$.
II. La suma es igual a uno para $x=1$.
III. La suma es 1721 para $x=-1$.

Son correctas

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) II y III

RESOLUCIÓN

Tema: Series sumatorias

Tenemos que

$$\sum_{k=0}^{1720}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)^0+\left(-\frac{1}{x}\right)^1+\left(-\frac{1}{x}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{x}\right)^{1720}}_{1721\text{ sumandos}}$$

Si $x=1$,

$$\sum_{k=0}^{1720}(-1)^k=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{1720}$$

$$\sum_{k=0}^{1720}(-1)^k=\underbrace{1-1+1-1+1-1+\ldots+1}_{1721\text{ sumandos}}=1$$

Si $x=-1$,

$$\sum_{k=0}^{1720}(1)^k=1^0+1^1+1^2+1^3+\ldots+1^{1720}$$

$$\sum_{k=0}^{1720}(1)^k=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{1721\text{ sumandos}}=1721$$

Por lo tanto, son correctas II y III.

Respuesta: II y III

PREGUNTA N.° 19

Dada la ecuación cuadrática

$x^2-mx+m+3=0$

Determine m tal que tenga soluciones reales.

A) $\langle-\infty; 3] \cup [7; +\infty\rangle$
B) $\langle-\infty; -4] \cup [8; +\infty\rangle$
C) $\langle-\infty; -2] \cup [6; +\infty\rangle$
D) $\mathbb{R}$
E) $\langle-\infty; -5]$

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuación cuadrática

Tenemos.

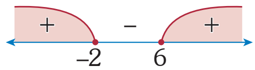
$x^2-mx+m+3=0$ tiene soluciones reales.

Entonces $\Delta \geq 0$

$\Delta=(-m)^2-4(1)(m+3) \geq 0$

$m^2-4m-12 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (m-6)(m+2) \geq 0$

$m \quad -6$
$m \quad +2$



$\rightarrow \; m \in \langle-\infty; -2] \cup [6; +\infty\rangle$

Respuesta: $\langle-\infty; -2] \cup [6; +\infty\rangle$

PREGUNTA N.° 20

Dado el problema

$$\underset{\bar{x}\in P}{\text{Minimizar}}\, f(\bar{x})$$

donde P es una pirámide *A-BCDE*.

Si $\underset{\bar{x}\in P}{\text{mínimo}} f(\bar{x})=f(A)$, siendo f una función lineal de la forma $f(\bar{x})=ax+by+cz$ y, además, se cumple que

$$f(A)=f(B)=f(C)$$

Indique cuál de las siguientes proposiciones es correcta.

A) $\underset{\bar{x}\in P}{\text{mínimo}} f(\bar{x})=\underset{\bar{x}\in P}{\text{máximo}}(\bar{x})=f(A)$

B) $\underset{\bar{x}\in P}{\text{mínimo}} f(\bar{x})=f(A)<\underset{\bar{x}\in P}{\text{máximo}}(\bar{x})$

C) $f(A)=f(B)=f(C)<f(\bar{x}),\ x\notin\{A;B;C\}$

D) $f(A)<f(\bar{x})\,\forall\bar{x}\in P$

E) $f(A)=f(B)=f(C)>f(\bar{x}),\ x\notin\{A;B;C\}$

RESOLUCIÓN

Tema: Programación lineal

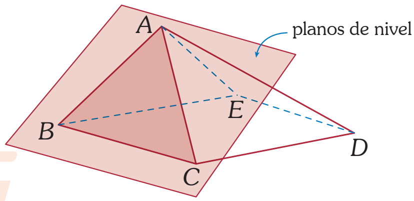
Tenemos que $f(\bar{x})=ax+by+cz$ es la ecuación de un plano, además

$$\underset{\bar{x}\in P}{\text{mín}} f(\bar{x})=f(A)$$

Entonces

$$\forall\, q\in P,\ f(q)\geq \underset{\bar{x}\in P}{\text{mín}} f(\bar{x})=f(A)$$

Como $f(A)=f(B)=f(C)$, tenemos que la cara ABC minimiza a $f(\bar{x})$.



Para todo punto M en la cara ABC cumple que

$$f(M)=f(A)=f(B)=f(C);$$

y para todo punto $N\in P$ y externo a la cara ABC cumple que

$$f(N)>f(A)$$

Como P es acotada, $f(x)$ tiene un valor máximo.

Luego

$$\underset{\bar{x}\in P}{\text{máximo}} f(\bar{x})\geq f(N)>f(A)=\underset{\bar{x}\in P}{\text{mínimo}}\, f(\bar{x})$$

Entonces

$$\underset{\bar{x}\in P}{\text{mínimo}} f(\bar{x})=f(A)<\underset{\bar{x}\in P}{\text{máximo}}\, f(\bar{x})$$

Respuesta: $\underset{\bar{x}\in P}{\text{mínimo}} f(\bar{x})=f(A)<\underset{\bar{x}\in P}{\text{máximo}}(\bar{x})$

PREGUNTA N.° 21

Se tiene un paralelogramo $ABCD$ en cuyo interior se toma un punto P. Por P se levanta una perpendicular al plano del paralelogramo y en ella se toma un punto E. Halle el volumen en m^3 de la pirámide E-DPC, si los volúmenes de las pirámides E-DPA, E-CPB y E-BPA son 10 m^3, 12 m^3 y 14 m^3, respectivamente.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 13

RESOLUCIÓN

Tema: Pirámide

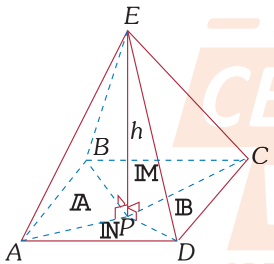
Sean $\mathbb{A}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{B}$ las áreas de las regiones indicadas en el gráfico. Nos piden $\frac{\mathbb{B}h}{3}=V_x$.

Datos:

$\frac{\mathbb{A}h}{3}=14$

$\frac{\mathbb{N}h}{3}=10$

$\frac{\mathbb{M}h}{3}=12$



En el paralelogramo $ABCD$ sabemos que

$\mathbb{A}+\mathbb{B}=\mathbb{M}+\mathbb{N}$

Luego,

$$\frac{\mathbb{A}h}{3}+\frac{\mathbb{B}h}{3}=\frac{\mathbb{M}h}{3}+\frac{\mathbb{N}h}{3}$$

Reemplazamos.

$14+V_x=12+10$

$\therefore\ V_x=8$

Respuesta: 8

PREGUNTA N.° 22

Sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ubicados en planos diferentes, que forman un ángulo que mide 30°. Si $\overline{AC}\perp\overline{AB}$, $\overline{AC}\perp\overline{CD}$, $AC=2$ m, $AB=4$ m y $CD=\sqrt{3}$ m, entonces la longitud (en m) de $\overline{BD}$ es

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{12}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{14}$

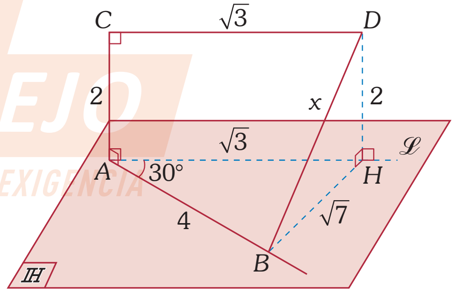
RESOLUCIÓN

Tema: Distancia entre alabeadas

Nos piden la longitud de $\overline{BD}$, en metros.

Dato: m$\measuredangle(\overline{CD};\overline{AB})=30°$

Trazamos $\mathscr{L}//\overline{CD}$, además, $\overline{DH}\perp$ ▱ $\mathbb{H}$.



Del triángulo ABH se obtiene: $BH=\sqrt{7}$

◺DHB

$x^2=\sqrt{7}^2+2^2$

$x=\sqrt{11}$

Por lo tanto, la longitud de $\overline{BD}$ es $\sqrt{11}$.

Respuesta: $\sqrt{11}$

PREGUNTA N.° 23

Si el número de lados de un polígono convexo disminuye en dos, el número de diagonales disminuye en quince. Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono inicial en grados sexagesimales.

A) 1440 B) 1620 C) 1800
D) 1980 E) 2160

RESOLUCIÓN

Tema: Polígonos

Piden la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono inicial en grados sexagesimales.

Polígono inicial

número de lados: n

número de diagonales

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Polígono final

número de lados: $n-2$

número de diagonales

$$\frac{(n-2)(n-5)}{2}$$

Por condición

$$\frac{(n-2)(n-5)}{2}=\frac{n(n-3)}{2}-15$$

$$\rightarrow\ n=10$$

Nos piden

$$S\sphericalangle i_{\substack{\text{polígono}\\ \text{inicial}}}180°(n-2)=1440°$$

$$\therefore\ S\sphericalangle i_{\substack{\text{polígono}\\ \text{inicial}}}=1440°$$

Respuesta: 1440

PREGUNTA N.° 24

Una torta de tres pisos de 30 cm de alto, está formada por tres prismas rectos de base rectangular de igual altura. Si los volúmenes de dichos prismas están en relación 1, 2 y 3. Calcule el área de la base de la torta (en cm^2), si el volumen total es de 12×10^4 cm^3.

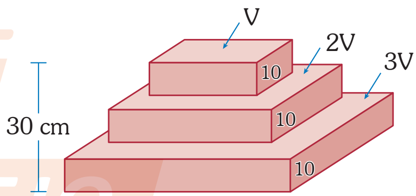
A) 10^3 B) 6×10^3 C) 12×10^3
D) 6×10^4 E) 12×10^4

RESOLUCIÓN

Tema: Prisma

Piden el área de la base de la torta.

Dato: los volúmenes están en relación 1; 2 y 3.



Sea $\mathbb{B}$ el área de la base de la torta.

Del dato:

$$V+2V+3V=12\times10^4\ cm^3$$

$$6V=12\times10^4 cm^3$$

Luego

$$3V=10\ cm\cdot\mathbb{B}$$

$$\rightarrow\ 6\times10^4\ cm^3=10\ cm\cdot\mathbb{B}$$

$$\therefore\ \mathbb{B}=6\times10^3\ cm^2$$

Respuesta: 6×10^3

PREGUNTA N.° 25

Se traza una circunferencia que tiene como diámetro uno de los lados de un triángulo equilátero de lado a. La longitud de la parte de la circunferencia que queda dentro del triángulo es:

A) $\frac{\pi a}{6}$ B) $\frac{\pi a}{3}$ C) $\frac{\pi a}{\sqrt{3}+1}$

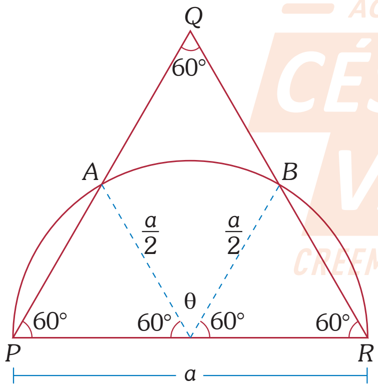
D) $\frac{\pi a}{\sqrt{2}}$ E) $\frac{\pi a}{\sqrt{2}+1}$

RESOLUCIÓN

Tema: Longitud de arco de circunferencia

Nos piden $L_{\overset{\frown}{AB}}$ (longitud del arco AB).

Dato: $\triangle PQR$ es equilátero.



Como θ (θ=60°) en radianes es $\frac{\pi}{3}$,

$$L_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\pi}{3}\times\frac{a}{2}$$

$$\therefore\ L_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\pi a}{6}$$

Respuesta: $\frac{\pi a}{6}$

PREGUNTA N.° 26

En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que $m\measuredangle ABC=3m\measuredangle ACB$. Si la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BM}$ en el punto P, entonces el mayor valor entero de la medida (en grados sexagesimales) del ángulo PCA es

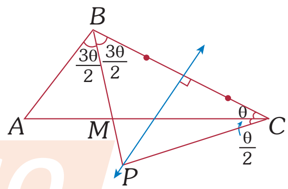
A) 11 B) 12 C) 13

D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN

Tema: Aplicación de la congruencia

Nos piden el mayor valor entero de la medida del ángulo $PCA=\left(\frac{\theta}{2}\right)_{\text{máx}(\mathbb{Z})}$



En el gráfico, por teorema de mediatriz

$\overline{PB}=\overline{PC}$

Entonces

$$m\measuredangle PCB=\frac{3\theta}{2}$$

$$m\measuredangle PBC=\frac{3\theta}{2}$$

$$m\measuredangle PCA=\frac{\theta}{2}$$

Como el $\triangle ABC$ es acutángulo,

$$3\theta<90°$$

$$\theta<30°$$

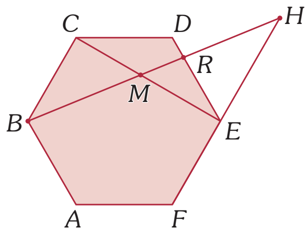
$$\frac{\theta}{2}<15°$$

$$\therefore\ \left(\frac{\theta}{2}\right)_{\text{máx}_z}=14°$$

Respuesta: 14

PREGUNTA N.° 27

En la figura, *ABCDEF* es un hexágono regular, determine *RH*, sabiendo que $BM=a$ y $MR=b$, con $a>b$.



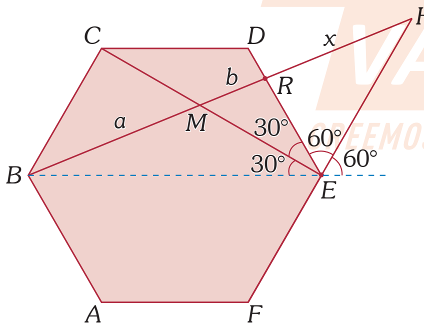
A) $\dfrac{a(a+b)}{a-b}$ B) $\dfrac{b(a+b)}{a-b}$ C) $\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$

D) $\dfrac{ab}{a-b}$ E) $\dfrac{b^2}{a-b}$

RESOLUCIÓN

Tema: Proporcionalidad de segmentos

Nos piden x.



Para el $\triangle BRE$, $\overline{EM}$ es bisectriz interior y $\overline{EH}$ es bisectriz exterior.

Entonces *B*, *M*, *R* y *H* forman una cuaterna armónica

$\rightarrow\ ax=b(a+b+x)$

$x(a-b)=b(a+b)$

$$\therefore\ x=\frac{b(a+b)}{a-b}$$

Respuesta: $\dfrac{b(a+b)}{a-b}$

PREGUNTA N.° 28

ABCD-EFGH es un hexaedro regular; *M* y *N* centros de las caras *ABFE* y *BFGC*, respectivamente. Calcule la medida del diedro que forman los planos *MND* y *ADC*.

A) $\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$ D) $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

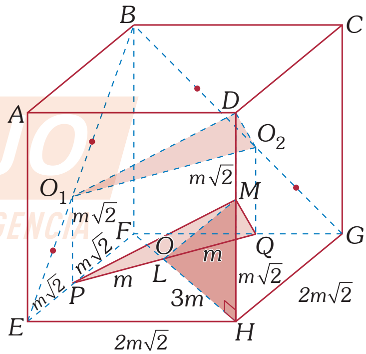
B) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ E) $\arctan\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

C) $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

RESOLUCIÓN

Tema: Ángulo diedro

Nos piden θ (medida del ángulo diedro determinado por las regiones *ABCD* y O_1O_2D).



Del gráfico observamos que el $\triangle PMQ$ es paralelo con $\triangle O_1DO_2$ y el $\square EFGH$ es paralelo con $\square ABCD$, entonces $m\measuredangle MLH=\theta$ es la medida que se busca calcular.

En el $\triangle LMH$,

$$\tan\theta=\frac{m\sqrt{2}}{Bm}\ \rightarrow\ \tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ \theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

Respuesta: $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

PREGUNTA N.° 29

Dado el punto $P_1(3; 4)$, determine el número de los puntos que se generan por simetría, si se toman como ejes de simetría, los ejes coordenados y la recta $y=x$.

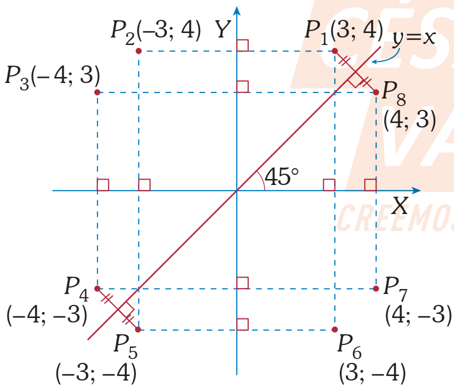
A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN

Tema: Simetría

Piden N (número de puntos que se generan por simetría).

Graficamos.



Del gráfico observamos que los puntos que se generan son

P_1; P_2; P_3; P_4; P_5; P_6; P_7 y P_8

$\therefore$ $N=8$ puntos

Respuesta: 8

PREGUNTA N.° 30

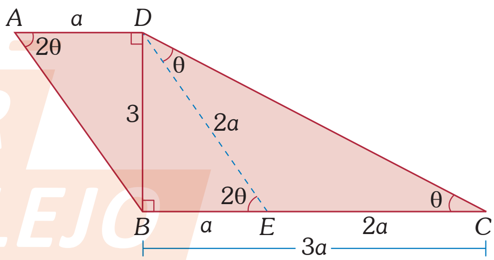
En un trapecio $ABCD$ cuyas bases son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, donde $AD=\dfrac{1}{3}BC$ y la altura $BD=3$ u. Si $m\sphericalangle BAD=2m\sphericalangle BCD$, calcule el área del trapecio (en u^2).

A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN

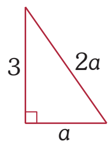
Tema: Áreas de regiones cuadrangulares

Nos piden $\mathbb{A}_{ABCD}$.



Trazamos $\overline{DE}$, entonces $\overline{BE}=a$. El $ABED$ es un paralelogramo, además, $DE=CE=2a$.

El $\triangle DBE$ es notable de 30° y 60°.



; $a=\sqrt{3}$

Calculamos.

$$\mathbb{A}_{ABCD}=\left(\frac{a+3a}{2}\right)3=\left(\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2}\right)3$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{ABCD}=6\sqrt{3}$$

Respuesta: $6\sqrt{3}$

PREGUNTA N.° 31

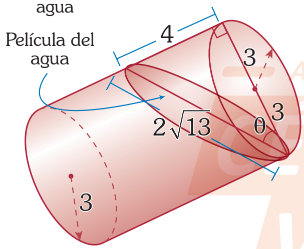
Un vaso que tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo diámetro mide 6 cm, contiene agua hasta cierta altura. Se inclina el vaso justo hasta que el agua llegue al borde, en ese instante el borde opuesto del agua se ha alejado del borde del vaso 4 cm. Determine el área (en cm^2) de la película que se ha formado por la inclinación.

A) $\pi\sqrt{13}$ B) $2\pi\sqrt{13}$ C) $3\pi\sqrt{13}$
D) $4\pi\sqrt{13}$ E) $5\pi\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN

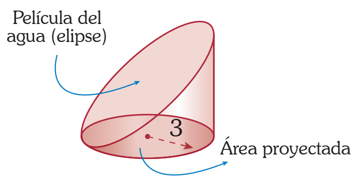
Tema: Cilindro

Nos piden $\mathbb{A}_{\substack{\text{película}\\ \text{del}\\ \text{agua}}}$



Se observa que la elipse se proyecta sobre la base.

Entonces



$$\pi=(3)^2=\left(\mathbb{A}_{\substack{\text{película}\\ \text{del agua}}}\right)\cdot\cos\theta$$

$$9\pi=\left(\mathbb{A}_{\substack{\text{película}\\ \text{del agua}}}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{película}\\ \text{del agua}}}=3\pi\sqrt{13}$$

Respuesta: $3\pi\sqrt{13}$

PREGUNTA N.° 32

Se desea diseñar un mosaico compuesto por tres mayólicas que deben tener la forma de polígonos regulares, de tal manera que al menos dos mayólicas sean congruentes con un vértice común. Los lados de cada mayólica deben tener una longitud de 1 m y la suma de las medidas de los ángulos interiores de las mayólicas que tiene el vértice común es 360°. Calcule el mayor perímetro (en m) que debe tener el mosaico obtenido.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

RESOLUCIÓN

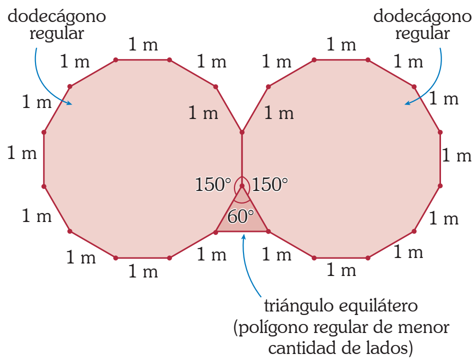
Tema: Polígonos regulares

Nos piden el mayor perímetro que debe tener el mosaico obtenido.

Por condición, tenemos 3 mayólicas (poligonales regulares) de las cuales 2 son congruentes, cuya suma de los ángulos internos en un vértice es 360°.

Como se busca el perímetro mayor de todo el mosaico, el polígono regular diferente debe tener la menor cantidad de lados, por lo cual, sería el triángulo equilátero y los otros dos serían dodecágonos regulares.

Debemos tener en cuenta que el ángulo interno del equilátero es 60° y de los dodecágonos regulares serían 150°.



$$\therefore\ 2P_{\substack{\text{mosaico}\\ \text{mayor}\\ \text{valor}}}=21\text{ m}$$

Respuesta: 21

PREGUNTA N.° 33

De las relaciones

$\tan x = \cot y$

$\cos(\pi \cos x) = \operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen} y)$

donde $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$; $y \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$

Calcule $E = \sec x$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuaciones trigonométricas

Tenemos las siguientes condiciones:

$\tan x = \cot y$ (I)

$\cos(\pi \cos x) = \operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen} y)$ (II)

De (I) tenemos que

$$x + y = \frac{\pi}{2}$$

De (II) tenemos que

$$\pi \cos x + \pi \operatorname{sen} y = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \cos x + \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$$

$$\cos x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$$

$$2\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{4}$$

$\therefore \sec x = 4$

Respuesta: 4

PREGUNTA N.° 34

Se desea construir un túnel en una montaña entre dos pueblos en Huancayo, que tenga como sección transversal un arco semielíptico, con eje mayor de 15 metros y una altura en el centro de 3 metros. Encuentre la ecuación canónica de la elipse sobre la que descansa la sección transversal del túnel.

A) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{9} = 1$

B) $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{2,25} = 1$

C) $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$

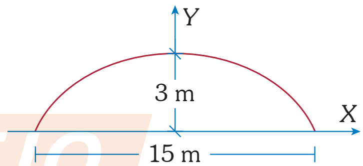
D) $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{36} = 1$

E) $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1$

RESOLUCIÓN

Tema: Secciones cónicas (elipse)

Completamos los datos en el gráfico.



Del gráfico se observa una semielipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El eje mayor es $2a = 15$

$$\rightarrow a = \frac{15}{2}$$

El eje menor es $b = 3$

Operamos la ecuación canónica.

$$\frac{x^2}{\frac{225}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Por lo tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Respuesta: $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$

PREGUNTA N.° 35

Determine el valor de x, si se cumple que

$$\arctan\left(x+\sqrt{5}\right)+\operatorname{arccot}(5x-2)=\frac{\pi}{2}$$

A) $\left(2+\sqrt{5}\right)$

B) $\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5}\right)$

C) $\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{5}\right)$

D) $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{5}\right)$

E) $\frac{1}{6}\left(2-\sqrt{5}\right)$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas inversas

Del dato:

$$\arctan\left(x+\sqrt{5}\right)+\operatorname{arccot}(5x-2)=\frac{\pi}{2}$$

Se cumple que

$$x+\sqrt{5}=5x-2$$

$$2+\sqrt{5}=4x$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{5}\right)$$

Respuesta: $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{5}\right)$

PREGUNTA N.° 36

Tres ángulos $\alpha°$, $\beta°$, $\gamma°$ medidos positivamente, son coterminales con el ángulo de 7000°, también medido positivamente.
Determine la suma de los menores ángulos con esa propiedad, si se tiene que $\alpha° < \beta° < \gamma°$.

A) 480° B) 840° C) 1200°
D) 1560° E) 1920°

RESOLUCIÓN

Tema: Razones trigonométricas de ángulos en posición normal

Nos piden calcular la suma de los menores ángulos.
Se sabe que $\alpha°$, $\beta°$ y $\gamma°$ son coterminales con 7000°.

Entonces $\alpha°$, $\beta°$ y $\gamma°$ son de la forma

$$7000°-360°n;\ n\in\mathbb{Z}$$

Calculamos la suma de los menores ángulos positivos.

$$\alpha°=7000°-360°(19)$$

$$\beta°=7000°-360°(18)$$

$$\gamma°=7000°-360°(17)$$

$$\therefore\quad \alpha°+\beta°+\gamma=1560°$$

Respuesta: 1560°

PREGUNTA N.° 37

Si $1+\tan^2\theta-\cot\theta=0$.
calcule el valor de

$$E=\sqrt[3]{9+\cos^4\theta-\tan^2\theta\cdot\csc^2\theta}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Tema: Identidades fundamentales

Por condición del problema tenemos que

$$1+\tan^2\theta-\cot\theta=0\ \rightarrow\ 1+\tan^2\theta=\cot\theta$$

Luego, $\sec^2\theta=\cot\theta$ y $\cos^2\theta=\tan\theta$.

Nos piden calcular E.

$$E=\sqrt[3]{9+\cos^4\theta-\tan^2\theta\cdot\csc^2\theta}$$

$$E=\sqrt[3]{9+\tan^2\theta-\tan^2\theta\csc^2\theta}$$

$$E=\sqrt[3]{9-\tan^2\theta\left(\csc^2\theta-1\right)}$$

$$E=\sqrt[3]{9-\tan^2\theta\left(\cot^2\theta\right)}$$

$$\therefore\quad E=2$$

Respuesta: 2

PREGUNTA N.° 38

Determine el valor máximo de la siguiente función:

$$y(x)=\sqrt{(1-\cos x)(1+2\cos x)},\ x\in\left\langle 0;\frac{2\pi}{3}\right\rangle$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{6}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas directas

Tenemos.

$$y_{(x)}=\sqrt{(1-\cos x)(1+2\cos x)}$$

Dato:

$$0<x<\frac{2\pi}{3} \qquad \text{(I)}$$

Analizamos

$$y_{(x)}=\sqrt{-2\cos^2 x+\cos x+1}$$

$$y_{(x)}=\sqrt{-2\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}\right)+1+\frac{1}{8}}$$

$$y_{(x)}=\sqrt{\frac{9}{8}-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2} \qquad \text{(II)}$$

De I

$$-\frac{1}{2}<\cos x<1$$

Observación

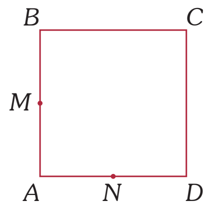
$y_{(x)}$ es máximo, cuando $\cos x=\frac{1}{4}$

Luego $y_{(x)}$ máximo, será $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Respuesta: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

PREGUNTA N.° 39

En el cuadrado *ABCD* de la figura mostrada, *M* y *N* son puntos medios de sus respectivos lados. Si m $\angle NMD=\theta$, entonces el valor de $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ es



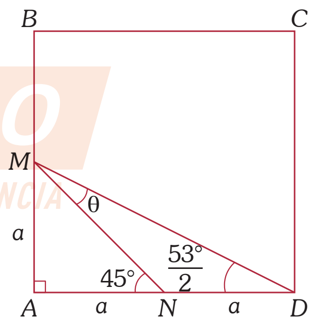
A) $\sqrt{5}-2$ B) $\sqrt{10}-3$ C) $\sqrt{5}+2$

D) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}+3$

RESOLUCIÓN

Tema: Razones trigonométricas de ángulos notables

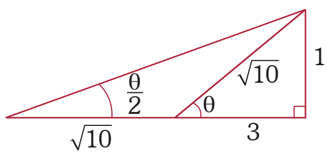
Del gráfico completamos los datos.



Consideremos que $AM=AN=ND=a$ y del gráfico observamos que

$$\theta=45°-\frac{53°}{2} \rightarrow \theta=\frac{37°}{2}$$

Luego,

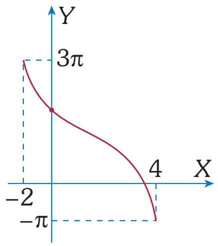


$$\therefore\ \cot\frac{\theta}{2}=3+\sqrt{10}$$

Respuesta: $3+\sqrt{10}$

PREGUNTA N.° 40

Si la gráfica de $y=A\arccos(Bx+C)+D$ es



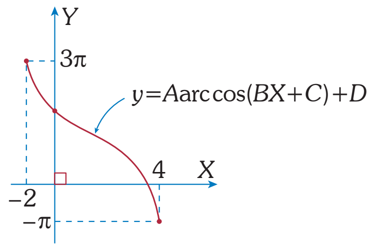
Determine el valor de $E=A+B+C$.

A) 3 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$

D) 4 E) $\frac{14}{3}$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas inversas



Del gráfico se tiene

- $\text{Dom} f=[-2;\, 4]$

$$-1 \leq Bx+C \leq 1$$

$$\underbrace{\frac{-1-C}{B}}_{-2} \leq x \leq \underbrace{\frac{1-C}{B}}_{4}$$

$$\rightarrow\ B=\frac{1}{3}\ \wedge\ C=-\frac{1}{3}$$

- $\text{Ran} f=[-\pi;\, 3\pi]$, entonces se sabe que

$$A=\frac{y_{\text{máx}}-y_{\text{mín}}}{\pi}$$

$$A=\frac{3\pi-(-\pi)}{\pi}\ \rightarrow\ A=4$$

Luego,

$$A+B+C=4+\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}$$

$$\therefore\ A+B+C=4$$

Respuesta: 4